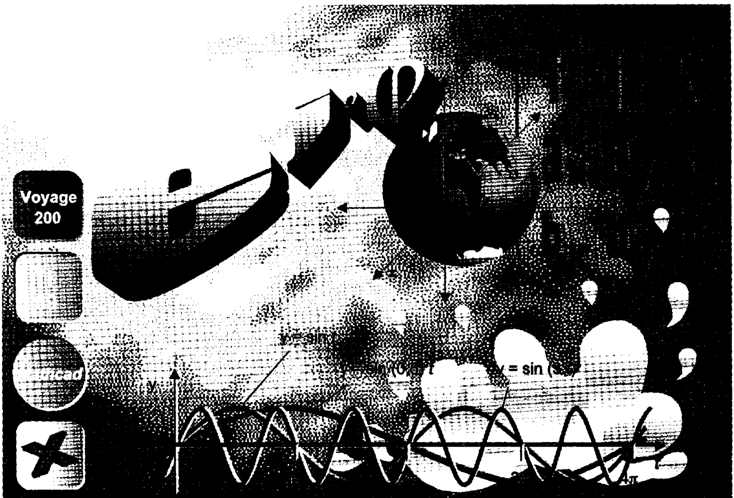
Ingenieur-Mathematik
2



Durchgerechnete Lösungen

E. DORNER

Inhalt

Erstellt von Hans Siedler und Wolfgang Timischl

3. Auflage, 2011

Anregungen zur Verbesserung erbeten an
wolfgang.timischl@schule.at oder gerald.kaiser@inode.at

Buch-Nr. 120 711

Hans Siedler, Wofgang Timischl
Ingenieur-Mathematik 2
Durchgerechnete Lösungen

Ungargasse 35, 1030 Wien
Tel.: 01 / 533 56 36, Fax: 01 / 533 56 36-15
E-Mail: office@dorner-verlag.at
www.dorner-verlag.at

ISBN 978-3-7055-**0633**-6

1 Funktionen

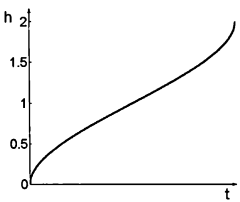
1.1

	Nullstellen	Maxima	Minima	Monotonie	Symmetrie
a)	0	P(1/4)	Q(-1/-4)	$]-\infty,-1]$ streng monoton fallend; $[-1,1]$ streng monoton steigend; $[1,\infty[$ streng monoton fallend	ungerade Funktion
b)	0; 9	P(3/10,5)	keine	$[0, 3]$ streng monoton steigend; $[3, \infty[$ streng monoton fallend	keine
c)	0; 3	P(3/0)	Q(1/-1)	$]-\infty,1]$ streng monoton fallend; $[1, 3]$ streng monoton steigend; $[3, \infty[$ streng monoton fallend	keine
d)	-1; 0; 1	P(0,5/0,25)	Q(-0,5/-0,25)	$]-\infty; -0{,}5]$ streng monoton fallend; $[-0{,}5; 0{,}5]$ streng monoton steigend; $[0{,}5; \infty[$ streng monoton fallend	ungerade Funktion
e)	-5; 5	P(0/1)	Q(-10/-1), R(10/-1)	$]-\infty, -10]$ streng monoton fallend; $[-10, 0]$ streng monoton steigend; $[0, 10[$ streng monoton fallend; $[10, \infty[$ streng monoton steigend	gerade Funktion
f)	0	keine	Q(-1/-0,4)	$]-\infty,-1]$ streng monoton fallend; $[-1,\infty[$ streng monoton steigend	keine

1.2 **a)** Periode p = 4 **b)** Periode p = 2

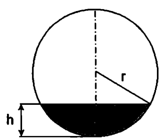
1.3 A – 3, Anstieg zuerst gleichbleibend (linear), danach wird der Anstieg immer geringer
B – 5: Anstieg wird immer größer
C – 1: Anstieg zuerst sehr stark (am Anfang sogar mit senkrechter Steigung), danach immer geringer
D – 4: Anstieg immer geringer
E – 6: Anstieg zuerst mit kleiner gleichbleibender Steigung, danach mit größerer gleichbleibender Steigung
F – 2: Stets gleichbleibende Steigung (linearer Anstieg)
G – 8: Anstieg zuerst gleichbleibend, danach wird der Anstieg immer größer
H – 7: Anstieg zuerst mit großer gleichbleibender Steigung, danach mit kleinerer gleichbleibender Steigung

1.4



In der Abbildung ist r = 1 (etwa 1 dm) angenommen.

Anmerkung für Interessierte:
h ist Lösung der Gleichung
$\frac{\pi h^2}{3}\cdot(3r-h)=q\cdot t$, wobei q die pro Zeiteinheit zufließende konstante Wassermenge ist. Auf der linken Seite der Gleichung steht das Volumen eines Kugelabschnittes.



1.5 **a)** 20 *l* **b)** 25 *l* c) 30 l
d) ja, denn der Benzinverbrauch pro km sinkt anfänglich stärker als später
e) Tankstelle auf offener Strecke (nach 200 km Fahrt), denn der Benzinverbrauch pro km ist danach gleich wie auf offener Strecke
f) Ja, denn der Benzinverbrauch pro km sinkt zuletzt stärker als früher

1.6 Gelingt es, die Gleichung der Funktion *eindeutig* nach x aufzulösen, so erhält man nach Vertauschung der Variablen x und y die Gleichung der Umkehrfunktion (in der üblichen Bezeichnungsweise).

a) $y = 2x \Rightarrow x = \frac{y}{2}$; Vertauschung von x und y ergibt die Gleichung der Umkehrfunktion: $y = \frac{x}{2}$

b) $y = -\frac{x}{2} + 3 \Rightarrow x = -2y + 6$;

Vertauschung von x und y ergibt die Gleichung der Umkehrfunktion: $y = -2x + 6$

c) $2x + 3y = 6 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}y + 3$;

Vertauschung von x und y ergibt die Gleichung der Umkehrfunktion: $y = -\frac{3}{2}x + 3$

d) $y = 3 = 0 \cdot x + 3$; Auflösung nach x ist nicht eindeutig möglich (würde auf eine Division durch null führen), daher gibt es keine Umkehrfunktion

1.7 Gelingt es, die Gleichung der Funktion *eindeutig* nach x aufzulösen, so erhält man nach Vertauschung der Variablen x und y die Gleichung der Umkehrfunktion (in der üblichen Bezeichnungsweise).

a) $y = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{y} = \frac{y+1}{y}$; Vertauschung von x und y ergibt die Gleichung der Umkehrfunktion: $y = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$

b) $y = x^2 + 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y-1}$, d.h. zu jedem $y > 1$ gibt es zwei x-Werte; etwa gibt es zu $y = 2$ die beiden x Werte 1 und –1. Auflösung also *nicht eindeutig* möglich, daher gibt es auch keine Umkehrfunktion

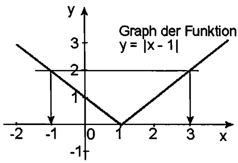
c) $y = \frac{x}{2x+1} \Rightarrow x = \frac{y}{1-2y}$;

Vertauschung von x und y ergibt die Gleichung der Umkehrfunktion: $y = \frac{x}{1-2x}$

d) $y = \frac{x-2}{x-1} \Rightarrow x = \frac{y+2}{1-y}$;

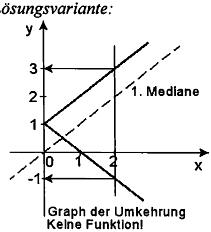
Vertauschung von x und y ergibt die Gleichung der Umkehrfunktion: $y = \frac{x+2}{1-x}$

1.8



Zu jedem $y > 0$ gibt es nicht mehr nur einen x-Wert, sondern zwei x-Werte. So gibt es etwa zu $y = 2$ die x-Werte –1 sowie 3. Daher ist die eindeutige Lösbarkeit der Funktionsgleichung $y = |x - 1|$ nach x nicht mehr gegeben; es gibt keine Umkehrfunktion!

Lösungsvariante:



Man spiegelt den Graph der Funktion $y = |x - 1|$ an der ersten Mediane. Der gespiegelte Graph ist nicht mehr Graph einer Funktion. Denn zu jedem $x > 0$ gehören zwei y-Werte. Etwa gehören zu $x = 2$ die y - Werte –1 sowie 3.

2 Potenzen und Potenzfunktionen

2.1 **a)** $2^{-1} \cdot 3^{-2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^2} = \frac{1}{18}$ **b)** $\frac{a \cdot b^{-2}}{2c^{-1}} = \frac{a \cdot \frac{1}{b^2}}{2 \cdot \frac{1}{c}} = \frac{\frac{a}{b^2}}{\frac{2}{c}} = \frac{a \cdot c}{2 \cdot b^2}$ **c)** $3 \cdot (x-y)^{-1} = \frac{3}{x-y}$

d) $\frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{10^3}} = \frac{10^3}{2} = 500$ **e)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$

2.2 **a)** $\left(0{,}5 \cdot 10^2\right)^{-1} = \frac{1}{0{,}5 \cdot 10^2} = \frac{1}{50} = 0{,}02$

b) $\left(-3 \cdot 10^{-1}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{-3 \cdot 10^{-1}}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{10}{-3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{100}{9}} = \frac{100}{9}$

c) $\frac{\left(2 \cdot 10^{-2}\right)^2 \cdot 5 \cdot 10^2}{10^{-2}} = \frac{2^2 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^2}{10^{-2}} = 20 \cdot 10^{-4+2-(-2)} = 20$

d) $\frac{\left(3 \cdot 10^{-1}\right)^2 \cdot \frac{4}{10^{-1}}}{10^{-1}} = \frac{3^2 \cdot 10^{-2} \cdot 4}{10^{-1} \cdot 10^{-1}} = \frac{3^2 \cdot 10^{-2} \cdot 4}{10^{-2}} = 36$

2.3 **a)** $\left(2 \cdot a^2\right)^2 \cdot \frac{1}{2a^3} \cdot \frac{1}{a^{-1}} = \frac{2^2 \cdot a^4 \cdot a}{2a^3} = 2a^2$

b) $\left(2 + \frac{1}{x}\right)^{-1} : x = \left(\frac{2x+1}{x}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{(2x+1)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{(2x+1) \cdot x} = \frac{1}{2x+1}$

c) $\frac{\left(2x^2\right)^2}{5x^3} \cdot \left(\frac{6x}{5}\right) = \frac{2x^2 \cdot 2x^2 \cdot 6x}{5x^3 \cdot 5} = \frac{24x^2}{25}$

d) $\left(a^2 \cdot \frac{b^{-2}}{c^3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{(2c)^2}{2b}\right)^{-1} = \left(\frac{a^2}{b^2 \cdot c^3}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{4c^2}{2b}\right)^{-1} = \frac{b^2 \cdot c^3}{a^2} \cdot \frac{2b}{4c^2} = \frac{b^3 \cdot c}{2a^2}$

e) $\left(x^{-1} + \frac{1}{3x}\right) \cdot \left(\frac{x}{3} + 1\right)^{-1} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x}\right) \cdot \left(\frac{x+3}{3}\right)^{-1} = \frac{3+1}{3x} \cdot \frac{3}{x+3} = \frac{4}{x \cdot (x+3)}$

f) $\ldots = \left(\frac{x}{2} - \frac{\frac{1}{x}}{2}\right)^{-1} \cdot \frac{1 + \frac{1}{x}}{2x} = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right)^{-1} \cdot \frac{\frac{x+1}{x}}{2x} = \left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^{-1} \cdot \frac{x+1}{2x^2} = \frac{2x}{x^2-1} \cdot \frac{x+1}{2x^2} = \frac{1}{x \cdot (x-1)}$

2.4 a) $2^{n+1} + 2^n = 2^n \cdot (2+1) = 3 \cdot 2^n$ b) $3^{n+1} + 2 \cdot 3^n = 3^n \cdot 3 + 2 \cdot 3^n = 3^n \cdot (3+2) = 5 \cdot 3^n$

c) $3^{x+3} - 3^{x+1} + 2 \cdot 3^{x+2} = 3^{x+1} \cdot (3^2 - 1 + 2 \cdot 3) = 14 \cdot 3^{x+1} = 14 \cdot 3 \cdot 3^x = 42 \cdot 3^x$

d) $a^{n+2} - a^n = a^n \cdot (a^2 - 1) = a^n \cdot (a-1) \cdot (a+1)$ e) $x^m + x^{2m} = x^m \cdot (1 + x^m)$

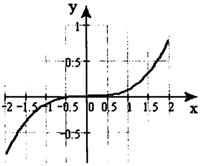
2.5 $r = 6370 \text{ km} = 6{,}37 \cdot 10^8 \text{ cm}$; $V_{Kugel} = \frac{4\pi}{3} \cdot r^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot 258{,}4749 \cdot 10^{24} \approx 1082{,}6969 \cdot 10^{24} \text{ cm}^3$;

$m = 1082{,}6969 \cdot 10^{24} \cdot 5{,}5 = 5954{,}833 \cdot 10^{24} \text{g} \approx 6 \cdot 10^{24} \text{kg}$; $\frac{2 \cdot 10^{30}}{6 \cdot 10^{24}} \approx 0{,}333 \cdot 10^6 = 333000$;

die Erdmasse ist etwa 333000-mal in der Sonnenmasse enthalten

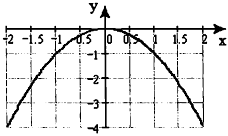
2.6 **a)** $y = 0{,}1 \cdot x^3$

x	y
-2	-0.8
-1.5	-0.338
-1	-0.1
-0.5	-0.013
0	0
0.5	0.013
1	0.1
1.5	0.338
2	0.8



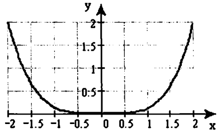
b) $y = -x^2$

x	y
-2	-4
-1.5	-2.25
-1	-1
-0.5	-0.25
0	0
0.5	-0.25
1	-1
1.5	-2.25
2	-4



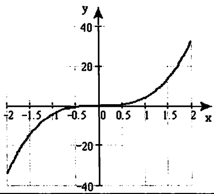
c) $y = \frac{1}{8} \cdot x^4$

x	y
-2	2
-1.5	0.633
-1	0.125
-0.5	0.008
0	0
0.5	0.008
1	0.125
1.5	0.633
2	2



d) $y = \frac{4}{3} \cdot \pi x^3$

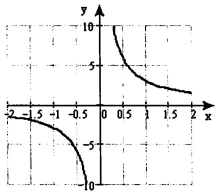
x	y
-2	-33.51
-1.5	-14.137
-1	-4.189
-0.5	-0.524
0	0
0.5	0.524
1	4.189
1.5	14.137
2	33.51



e) $y = \frac{3}{x}$;

nicht definiert (n.d.) an der Stelle x = 0 (Division durch null nicht möglich)

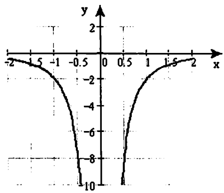
x	y
-2	-1.5
-1.5	-2
-1	-3
-0.5	-6
0	n.d.
0.5	6
1	3
1.5	2
2	1.5



f) $y = -\frac{2}{x^2}$;

nicht definiert (n.d.) an der Stelle x = 0 (Division durch null nicht möglich)

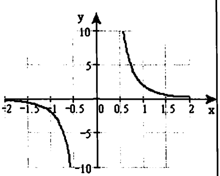
x	y
-2	-0.5
-1.5	-0.889
-1	-2
-0.5	-8
0	n.d.
0.5	-8
1	-2
1.5	-0.889
2	-0.5



g) $y = \frac{2}{x^3}$;

nicht definiert (n.d.) an der Stelle x = 0 (Division durch null nicht möglich)

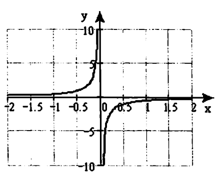
x	y
-2	-0.25
-1.5	-0.593
-1	-2
-0.5	-16
0	n.d.
0.5	16
1	2
1.5	0.593
2	0.25



h) $y = -\frac{1}{2x}$;

nicht definiert (n.d.) an der Stelle x = 0 (Division durch null nicht möglich)

x	y
-2	0.25
-1.5	0.333
-1	0.5
-0.5	1
0	n.d.
0.5	-1
1	-0.5
1.5	-0.333
2	-0.25



2.7 **a)** $c = \frac{a}{2}, n = 2$ **b)** $c = \frac{m}{2}, n = 2$ **c)** $x = \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot A \cdot \rho, n = 2$

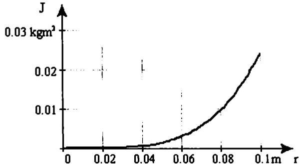
d) $c = \sigma \cdot A$, $n = 4$ **e)** $c = U^2$, $n = -1$ **f)** $c = G \cdot M \cdot m$, $n = -2$

2.8 r und h in m, J in kg m^2;

$\rho = 7{,}85 \text{ kg dm}^{-3} = 7850 \text{ kg m}^{-3}$

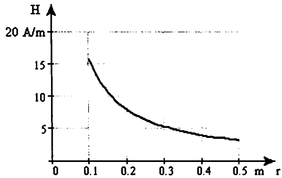
$J = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\pi \cdot r^2 \cdot 0{,}02 \cdot 7850}_{\text{Masse m}} \cdot r^2 \approx 247 \cdot r^4$

r (in m)	J (in kg m²)
0.00	0.0000
0.02	0.0000
0.04	0.0006
0.06	0.0032
0.08	0.0101
0.10	0.0247



2.9 r in m, H in A/m; $H = \frac{10}{2\pi \cdot r} = \frac{1{,}59}{r}$

r (in m)	H (in A/m)
0.10	15.92
0.20	7.96
0.30	5.31
0.40	3.98
0.50	3.18



2.10 **a)** Graph B **b)** Graph E **c)** Graph D **d)** Graph C **e)** Graph A **f)** Graph F

2.11 **a)** $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21$ **b)** $\binom{10}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252$ **c)** $\binom{4}{4} = 1$

d) $\binom{112}{1} = 112$ **e)** $\binom{3}{0} = 1$ **f)** $\binom{15}{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455$

g) $\binom{12}{11} = \binom{12}{1} = 12$ **h)** $\binom{10}{6} = \binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$

i) $\binom{9}{6} = \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$ **j)** $\binom{20}{16} = \binom{20}{4} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 4845$

2.12 **a)** $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

b) $(2d+3)^5 = (2d)^5 \cdot 3^0 + 5 \cdot (2d)^4 \cdot 3^1 + 10 \cdot (2d)^3 \cdot 3^2 + 10 \cdot (2d)^2 \cdot 3^3 + 5 \cdot (2d)^1 \cdot 3^4 + (2d)^0 \cdot 3^5 =$

$= 32d^5 + 240d^4 + 720d^3 + 1080d^2 + 810d + 243$

c) $(a-h)^4 = a^4 - 4a^3h + 6a^2h^2 - 4ah^3 + h^4$

d) $(2s+3t)^6 = (2s)^6 + 6 \cdot (2s)^5 \cdot (3t) + 15 \cdot (2s)^4 \cdot (3t)^2 + 20 \cdot (2s)^3 \cdot (3t)^3 + 15 \cdot (2s)^2 \cdot (3t)^4 +$

$+ 6 \cdot (2s) \cdot (3t)^5 + (3t)^6 =$

$= 64s^6 + 576s^5 \cdot t + 2160s^4 \cdot t^2 + 4320s^3 \cdot t^3 + 4860s^2 \cdot t^4 + 2916s \cdot t^5 + 729t^6$

e) $(5f-2g)^3 = (5f)^3 - 3 \cdot (5f)^2 \cdot (2g) + 3 \cdot (5f) \cdot (2g)^2 - (2g)^3 = 125f^3 - 150f^2 \cdot g + 60f \cdot g^2 - 8g^3$

f) $(2a-3b)^5 = (2a)^5 \cdot (3b)^0 - 5 \cdot (2d)^4 \cdot (3b)^1 + 10 \cdot (2d)^3 \cdot (3b)^2 - 10 \cdot (2d)^2 \cdot (3b)^3 +$

$+ 5 \cdot (2d)^1 \cdot (3b)^4 - (2d)^0 \cdot (3b)^5 = 32a^5 - 240a^4b + 720a^3b^2 - 1080a^2b^3 + 810ab^4 - 243b^5$

g) $(a-b)^8 = a^8 - 8a^7b + 28a^6b^2 - 56a^5b^3 + 70a^4b^4 - 56a^3b^5 + 28a^2b^6 - 8ab^7 + b^8$

2.13 a) $(1+\sqrt{2})^2 = 1+2\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2 = 3+2\cdot\sqrt{2}$

b) $\left(\sqrt{5}-1\right)\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)=\left(\sqrt{5}\right)^2-1=4$

c) $\left(3-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)=3\cdot\sqrt{3}-3-3+\sqrt{3}=4\cdot\sqrt{3}-6$

d) $\left(3\cdot\sqrt{2}-2\right)\cdot\left(\sqrt{2}+2\right)=3\cdot 2+6\cdot\sqrt{2}-2\cdot\sqrt{2}-4=2+4\cdot\sqrt{2}$

e) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=1$

f) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2=3+\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}+3-\sqrt{5}=6-2\cdot\sqrt{9-5}=2$

2.14 a) $\sqrt{5}=5^{\frac{1}{2}}$ b) $\sqrt[4]{2}=2^{\frac{1}{4}}$ c) $\sqrt[3]{4}=4^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$ d) $\sqrt[3]{7^2}=7^{\frac{2}{3}}$

e) $\sqrt[6]{5^4}=5^{\frac{4}{6}}=5^{\frac{2}{3}}$ f) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{3}}=\sqrt[12]{3}=3^{\frac{1}{12}}$ g) $\sqrt{\sqrt{3^4}}=\sqrt[4]{3^4}=3$

2.15 a) $\sqrt{x+y}=(x+y)^{\frac{1}{2}}$ b) $\sqrt[3]{a^3+b^3}=\left(a^3+b^3\right)^{\frac{1}{3}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{b}}=b^{-\frac{1}{2}}$

d) $\sqrt[3]{\frac{2}{a}}=\left(\frac{2}{a}\right)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}$ e) $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}=x^{-\frac{3}{4}}$ f) $\sqrt[3]{\frac{1}{t^2}}=t^{-\frac{2}{3}}$ g) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-y^2}}=\left(x^2-y^2\right)^{-\frac{1}{3}}$

2.16 a) $3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$ b) $a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$ c) $12^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{12^2}=\sqrt[5]{144}$

d) $7^{\frac{3}{6}}=7^{\frac{1}{2}}=\sqrt{7}$ e) $a^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{a}}$ f) $c^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{c^2}}$

g) $(2a)^{0,5}=\sqrt{2a}$ h) $21^{0,2}=21^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{21}$ i) $(m+n)^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{m+n}}$

2.17 a) $0{,}36^{\frac{1}{2}}=\sqrt{0{,}36}=0{,}6$ b) $32^{0,2}=32^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{32}=2$ c) $64^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{64}}=\frac{1}{4}$

d) $0{,}25^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{0{,}25}}=\frac{1}{0{,}5}=2$ e) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}$ f) $1024^{-0,1}=\frac{1}{\sqrt[10]{1024}}=\frac{1}{2}$

g) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-0,5}=\sqrt{4}=2$ h) $0{,}001^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{0{,}001^2}}=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{0{,}001}\right)^2}=\frac{1}{0{,}1^2}=\frac{1}{0{,}01}=100$

2.18 a) $\sqrt{3^2}=3$; $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$; richtig b) $\sqrt[3]{4^2}=\sqrt[3]{16}$; $\sqrt[3]{2^4}=\sqrt[3]{16}$; richtig

c) $\sqrt[4]{\frac{1}{4}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}=\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\sqrt{\frac{1}{4}}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$; richtig

d) $\left(\sqrt{3^{-1}}\right)^3=\left(3^{-\frac{1}{2}}\right)^3=3^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3^3}}$; $\left(\sqrt{3^3}\right)^{-1}=\left(3^{\frac{3}{2}}\right)^{-1}=3^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3^3}}$; richtig

e) $\left(\sqrt{x^{-1}}\right)^3=\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^3=x^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x^3}}$; $\left(\sqrt{x^3}\right)^{-1}=\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{-1}=x^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{x^3}}$; richtig

2.19 **a)** $\sqrt[3]{5}+2\cdot\sqrt{5}-\left(4\cdot\sqrt{5}-3\cdot\sqrt[3]{5}\right)=\sqrt[3]{5}+2\cdot\sqrt{5}-4\cdot\sqrt{5}+3\cdot\sqrt[3]{5}=4\cdot\sqrt[3]{5}-2\cdot\sqrt{5}$

b) $2\cdot\sqrt{u}-\sqrt[3]{u}-\sqrt{u}-\sqrt[3]{u}=\sqrt{u}-2\cdot\sqrt[3]{u}$

c) $x\cdot\sqrt{y}-y\cdot\sqrt{y}-\sqrt{y}=(x-y-1)\cdot\sqrt{y}$

2.20 a) $\sqrt{32}=\sqrt{2^5}=\sqrt{2^2\cdot 2^2\cdot 2}=2\cdot 2\cdot\sqrt{2}=4\cdot\sqrt{2}$ b) $\sqrt[3]{108}=\sqrt[3]{27\cdot 4}=3\cdot\sqrt[3]{4}$ c) $\sqrt{4a}=2\cdot\sqrt{a}$

d) $\sqrt{a^3}=a\cdot\sqrt{a}$ e) $\sqrt{4u\,v^2}=2v\cdot\sqrt{u}$ f) $\sqrt[3]{2x^3}=x\cdot\sqrt[3]{2}$

g) $\sqrt[3]{54x^4y}=\sqrt[3]{27\cdot 2\cdot x^4 y}=3x\cdot\sqrt[3]{2\cdot x\cdot y}$ h) $\sqrt{9\cdot(x^2+y^2)}=3\cdot\sqrt{x^2+y^2}$

i) $\sqrt{a\cdot b^2-b^3}=\sqrt{b^2\cdot(a-b)}=b\cdot\sqrt{a-b}$ j) $\sqrt[3]{v^7}=\sqrt[3]{v^6\cdot v}=v^2\cdot\sqrt[3]{v}$

k) $\sqrt{1{,}21\cdot 10^3}=\sqrt{121\cdot 10}=11\cdot\sqrt{10}$ l) $\sqrt{x^{2n+3}}=\sqrt{x^{2n+2}\cdot x}=\sqrt{x^{n+1}\cdot x^{n+1}\cdot x}=x^{n+1}\cdot\sqrt{x}$

m) $\sqrt{\frac{8}{9}}=\sqrt{\frac{4}{9}\cdot 2}=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2}$ n) $\sqrt{\frac{2}{b^2}}=\frac{1}{b}\cdot\sqrt{2}$ o) $\sqrt{\frac{8}{x^3}}=\sqrt{\frac{4}{x^2}\cdot\frac{2}{x}}=\frac{2}{x}\cdot\sqrt{\frac{2}{x}}$

p) $\sqrt[3]{\frac{16a}{b^4}}=\sqrt[3]{\frac{8}{b^3}\cdot\frac{2a}{b}}=\frac{2}{b}\cdot\sqrt[3]{\frac{2a}{b}}$ q) $\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^3}}=\sqrt{\frac{1}{x^2}\cdot\frac{x^2-y^2}{x}}=\frac{1}{x}\cdot\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x}}$

r) $\sqrt{\frac{(x+y)^3\cdot(x-y)}{4}}=\sqrt{\frac{(x+y)^2\cdot(x+y)\cdot(x-y)}{4}}=\frac{x+y}{2}\cdot\sqrt{x^2-y^2}$

2.21 a) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{16}=4$ b) $\sqrt[4]{9}\cdot\sqrt[4]{9}=\sqrt[4]{9\cdot 9}=\sqrt[4]{3^4}=3$ c) $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{27}{8}}=\sqrt{\frac{2\cdot 27}{3\cdot 8}}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$

d) $\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{25}}=\sqrt[3]{\frac{2\cdot 4}{5\cdot 25}}=\sqrt[3]{\frac{2^3}{5^3}}=\frac{2}{5}$ e) $\sqrt{x}\cdot\sqrt{2x^3}=\sqrt{2x^4}=x^2\cdot\sqrt{2}$

f) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a\cdot b}\cdot\sqrt{2a}=\sqrt{2a^3\cdot b}=a\cdot\sqrt{2a\cdot b}$

g) $\sqrt[3]{9a}\cdot\sqrt[3]{3\cdot a^2}=\sqrt[3]{27\cdot a^3}=3a$ h) $\sqrt[3]{1-a}\cdot\sqrt[3]{(1-a)^2}=\sqrt[3]{(1-a)^3}=1-a$

i) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2=2-2\cdot\sqrt{2\cdot 3}+3=5-2\cdot\sqrt{6}$

j) $\left(2\cdot\sqrt{3}-3\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{6}=\left(2\cdot\sqrt{3\cdot 6}-3\cdot\sqrt{2\cdot 6}\right)=2\cdot\sqrt{9\cdot 2}-3\cdot\sqrt{4\cdot 3}=6\cdot\sqrt{2}-6\cdot\sqrt{3}=6\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$

k) $\sqrt{3a+3b}\cdot\sqrt{12\cdot(a+b)}=\sqrt{36\cdot(a+b)^2}=6\cdot(a+b)$

l) $\sqrt{u\cdot v+v}\cdot\sqrt{u^2\cdot v+u\cdot v}=\sqrt{v\cdot(u+1)}\cdot\sqrt{u\cdot v\cdot(u+1)}=\sqrt{u\cdot v^2\cdot(u+1)^2}=v\cdot(u+1)\cdot\sqrt{u}$

2.22 a) $2\cdot\sqrt{3}=\sqrt{12}$ b) $4\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{128}$ c) $3\cdot\sqrt[4]{5}=\sqrt[4]{405}$ d) $x^2\cdot\sqrt[3]{4x}=\sqrt[3]{4x^7}$

e) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{\frac{8}{4}}=\sqrt{2}$ f) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{\frac{16}{8}}=\sqrt[3]{2}$ g) $\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{3}{4}}=\sqrt{\frac{12}{36}}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

h) $2m\cdot\sqrt{\frac{1}{m}}=\sqrt{\frac{4m^2}{m}}=\sqrt{4m}$ i) $\frac{2}{a}\cdot\sqrt{a^3}=\sqrt{\frac{4a^3}{a^2}}=\sqrt{4a}$ j) $\frac{2}{x}\cdot\sqrt{\frac{x}{3}}=\sqrt{\frac{4x}{3x^2}}=\sqrt{\frac{4}{3x}}$

k) $\frac{3c}{2}\cdot\sqrt{\frac{4}{c}}=\sqrt{\frac{36c^2}{4c}}=\sqrt{9c}$ l) $\frac{3}{x}\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2}{9}}=\sqrt[3]{\frac{27x^2}{9x^3}}=\sqrt[3]{\frac{3}{x}}$ m) $(u+1)\sqrt{2}=\sqrt{2\cdot(u+1)^2}$

n) $(a-b)\cdot\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}=\sqrt{\frac{(a+b)\cdot(a-b)^2}{a-b}}=\sqrt{a^2-b^2}$ o) $\frac{1}{x+1}\cdot\sqrt{x^2-1}=\sqrt{\frac{x^2-1}{(x+1)^2}}=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

2.23 a) $\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$ b) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$ c) $\dfrac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\dfrac{2x}{x}} = \sqrt{2}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{24a}}{\sqrt[3]{3a}} = \sqrt[3]{\dfrac{24a}{3a}} = \sqrt[3]{8} = 2$ e) $\dfrac{\sqrt{c^3 \cdot x}}{\sqrt{c \cdot x}} = \sqrt{\dfrac{c^3 \cdot x}{c \cdot x}} = \sqrt{c^2} = c$

f) $\dfrac{\sqrt{2 \cdot (x+3)}}{\sqrt{x+3}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot (x+3)}{x+3}} = \sqrt{2}$ g) $\dfrac{\sqrt{a \cdot b}}{\sqrt{\dfrac{a}{b}}} = \sqrt{\dfrac{a \cdot b}{\dfrac{a}{b}}} = \sqrt{\dfrac{a \cdot b^2}{a}} = b$

h) $\sqrt{\dfrac{1}{9m^2}} = \dfrac{1}{3m}$ i) $\sqrt{\dfrac{3x^2}{(4y)^2}} = \dfrac{x}{4y}\sqrt{3}$ j) $\sqrt{\dfrac{1}{a^{2n}}} = \sqrt{\dfrac{1}{a^n \cdot a^n}} = \dfrac{1}{a^n}$

2.24 a) $\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{6^3}} = \sqrt{\sqrt[3]{6^3}} = \sqrt{6}$ c) $\sqrt{\left(\sqrt{4}\right)^8} = \sqrt{\left(\sqrt{4}\right)^8} = \sqrt{2^8} = 2^4 = 16$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt{\sqrt[3]{8}} = \sqrt{2}$ e) $\sqrt{4 \cdot \sqrt[3]{4}} = \sqrt{\sqrt[3]{256}} = \sqrt[6]{4^4} = \sqrt[6]{2^8} = 2 \cdot \sqrt[6]{4} = 2 \cdot \sqrt[3]{2}$

f) $\sqrt[5]{4 \cdot \sqrt{2}} = \sqrt[5]{\sqrt{2^5}} = \sqrt{2}$ g) $\sqrt[3]{u \cdot \left(\sqrt[4]{u}\right)^2} = \sqrt[3]{u \cdot \sqrt{u}} = \sqrt{\sqrt[3]{u^3}} = \sqrt{u}$

h) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{\sqrt{b}}} = \dfrac{1}{\sqrt[6]{b}}$ i) $\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{x}}} = \sqrt[12]{x}$

j) $\sqrt[3]{\dfrac{r}{s} \cdot \sqrt{\dfrac{s^2}{r} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{r^2}}}} = \sqrt[3]{\dfrac{r}{s} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{s^4}{r^4}}} = \sqrt[3]{\dfrac{r}{s} \cdot \dfrac{s}{r}} = \sqrt[3]{1} = 1$

2.25 a) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt{8} = 16^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{1}{2}} = 16^{\frac{2}{6}} \cdot 8^{\frac{3}{6}} = \left(16^2 \cdot 8^3\right)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{16^2 \cdot 8^3} = \sqrt[6]{2^{17}} = 4 \cdot \sqrt[6]{2^5} = 4 \cdot \sqrt[6]{32}$

b) $\sqrt[3]{4} \cdot \left(\sqrt[4]{3}\right)^2 = 4^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{4}} = 4^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{2}{6}} \cdot 3^{\frac{3}{6}} = \left(4^2 \cdot 3^3\right)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{4^2 \cdot 3^3} = \sqrt[6]{432}$

c) $\sqrt[3]{100} \cdot \left(\sqrt{10}\right)^3 = \sqrt[3]{10^2} \cdot \sqrt{10^3} = 10^{\frac{2}{3}} \cdot 10^{\frac{1}{3}} = 10^{\frac{4}{6}} \cdot 10^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{10^4 \cdot 10^9} = \sqrt[6]{10^{13}} = 100 \cdot \sqrt[6]{10}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\left(\sqrt{2}\right)^3} = \dfrac{16^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{16^{\frac{2}{6}}}{2^{\frac{9}{6}}} = \left(\dfrac{16^2}{2^9}\right)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^8}{2^9}} = \sqrt[6]{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt[6]{2}}$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{2^{\frac{2}{6}}}{3^{\frac{3}{6}}} = \left(\dfrac{2^2}{3^3}\right)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^2}{3^3}} = \sqrt[6]{\dfrac{4}{27}}$

f) $\left(\sqrt[3]{u}\right)^4 \cdot \sqrt{u} = u^{\frac{4}{3}} \cdot u^{\frac{1}{2}} = u^{\frac{8}{6}} \cdot u^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{u^8 \cdot u^3} = \sqrt[6]{u^{11}} = u \cdot \sqrt[6]{u^5}$

g) $\sqrt[3]{u} \cdot \sqrt{\dfrac{v}{u}} = u^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\dfrac{v}{u}\right)^{\frac{1}{2}} = u^{\frac{2}{6}} \cdot \left(\dfrac{v}{u}\right)^{\frac{3}{6}} = \sqrt[6]{\dfrac{u^2 \cdot v^3}{u^3}} = \sqrt[6]{\dfrac{v^3}{u}}$

h) $\sqrt[4]{x \cdot \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}} = \sqrt[4]{x \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{3}}} = \sqrt[4]{x^{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}} = \sqrt[4]{x^{\frac{7}{6}}} = \left(x^{\frac{7}{6}}\right)^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{7}{24}} = \sqrt[24]{x^7}$

i) $\dfrac{p \cdot \sqrt{p}}{\sqrt[4]{p} \cdot \left(\sqrt[3]{p}\right)^2} = p^1 \cdot p^{\frac{1}{2}} \cdot p^{-\frac{1}{4}} \cdot p^{-\frac{2}{3}} = p^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{p^7}$

j) $\dfrac{\sqrt[4]{64 \cdot (a+y)^2}}{\sqrt{4 \cdot (a+y)}} = \dfrac{\sqrt{\sqrt{64 \cdot (a+y)^2}}}{\sqrt{4 \cdot (a+y)}} = \dfrac{\sqrt{8 \cdot (a+y)}}{\sqrt{4 \cdot (a+y)}} = \sqrt{\dfrac{8 \cdot (a+y)}{4 \cdot (a+y)}} = \sqrt{2}$

2.26 a) $\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $\frac{3}{\sqrt{3}}=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$ c) $\frac{1}{2\cdot\sqrt{6}}=\frac{1\cdot\sqrt{6}}{2\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{2\cdot 6}=\frac{\sqrt{6}}{12}$

d) $\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{2}}=\frac{1\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}}{3\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}}=\frac{\sqrt[3]{2^2}}{3\cdot 2}=\frac{\sqrt[3]{4}}{6}$ e) $\frac{p}{\sqrt[3]{p}}=\frac{p\cdot\sqrt[3]{p}\cdot\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{p}\cdot\sqrt[3]{p}\cdot\sqrt[3]{p}}=\frac{p\cdot\sqrt[3]{p^2}}{p}=\sqrt[3]{p^2}$

f) $\frac{y}{\sqrt{\frac{x\cdot y}{2}}}=\frac{y\cdot\sqrt{\frac{x\cdot y}{2}}}{\sqrt{\frac{x\cdot y}{2}}\cdot\sqrt{\frac{x\cdot y}{2}}}=\frac{y\cdot\sqrt{\frac{x\cdot y}{2}}}{\frac{x\cdot y}{2}}=\frac{2y\cdot\sqrt{\frac{x\cdot y}{2}}}{x\cdot y}=\frac{\sqrt{\frac{4\cdot x\cdot y}{2}}}{x}=\frac{\sqrt{2x\cdot y}}{x}$

g) $\frac{3}{\sqrt[4]{a+b}}=\frac{3\cdot\sqrt[4]{a+b}\cdot\sqrt[4]{a+b}\cdot\sqrt[4]{a+b}}{\sqrt[4]{a+b}\cdot\sqrt[4]{a+b}\cdot\sqrt[4]{a+b}\cdot\sqrt[4]{a+b}}=\frac{3\cdot\sqrt[4]{(a+b)^3}}{a+b}$

h) $\frac{u^2-v^2}{2\cdot\sqrt{u-v}}=\frac{(u^2-v^2)\cdot\sqrt{u-v}}{2\cdot\sqrt{u-v}\cdot\sqrt{u-v}}=\frac{(u^2-v^2)\cdot\sqrt{u-v}}{2\cdot(u-v)}=\frac{(u+v)\cdot\sqrt{u-v}}{2}$

i) $\frac{\frac{x}{3}}{\sqrt{3x}}=\frac{\frac{x}{3}\cdot\sqrt{3x}}{\sqrt{3x}\cdot\sqrt{3x}}=\frac{x\cdot\sqrt{3x}}{3\cdot 3x}=\frac{\sqrt{3x}}{9}$ j) $\frac{1}{1+\sqrt{3}}=\frac{1\cdot(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})\cdot(1-\sqrt{3})}=\frac{1-\sqrt{3}}{1-3}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

k) $\frac{1}{2+5\cdot\sqrt{3}}=\frac{1\cdot(2-5\cdot\sqrt{3})}{(2+5\cdot\sqrt{3})\cdot(2-5\cdot\sqrt{3})}=\frac{2-5\cdot\sqrt{3}}{4-75}=\frac{5\sqrt{3}-2}{71}$

l) $\frac{1}{\sqrt{2a}-b}=\frac{1\cdot(\sqrt{2a}+b)}{(\sqrt{2a}-b)\cdot(\sqrt{2a}+b)}=\frac{\sqrt{2a}+b}{2a-b^2}$

m) $\frac{\sqrt{3a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{3a}\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\frac{\sqrt{3a}\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}$

n) $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{(x-y)\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\frac{(x-y)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)}{x-y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

o) $\frac{1}{\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}}=\frac{1\cdot(\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u})}{(\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u})\cdot(\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u})}=\frac{\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u}}{1+u-(1-u)}=\frac{\sqrt{1+u}-\sqrt{1-u}}{2u}$

2.27 a) $\sqrt[3]{2^3+3^3}=\sqrt[3]{35}\neq 5$, falsch b) $\sqrt{\frac{1}{t}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{t}}=\frac{1}{\sqrt{t}}$, richtig c) $\sqrt[3]{\frac{z}{4}}=\frac{\sqrt[3]{z}}{\sqrt[3]{4}}$, richtig

d) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3h}=\sqrt{\frac{3h}{4}}\neq\sqrt{\frac{h}{3}}$, falsch e) $\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{x}}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{x}{2}}$, richtig

2.28 a) $\sqrt{1{,}21\cdot 10^3}+\sqrt{1{,}69\cdot 10^3}=\sqrt{121\cdot 10}+\sqrt{169\cdot 10}=11\cdot\sqrt{10}+13\cdot\sqrt{10}=24\cdot\sqrt{10}$

b) $\sqrt{1{,}44\cdot 10^5}-\sqrt{1{,}00\cdot 10^5}=\sqrt{144\cdot 10^3}-\sqrt{100\cdot 10^3}=12\cdot\sqrt{10^3}-10\cdot\sqrt{10^3}=2\cdot\sqrt{10^3}=20\cdot\sqrt{10}$

c) $\sqrt[3]{125a^2}+2\cdot\sqrt[3]{8a^2}=5\cdot\sqrt[3]{a^2}+2\cdot 2\cdot\sqrt[3]{a^2}=9\cdot\sqrt[3]{a^2}$

d) $\sqrt{0{,}49\cdot\pi\cdot r^2\cdot h}+\sqrt{0{,}36\cdot\pi\cdot r^2\cdot h}=0{,}7r\cdot\sqrt{\pi\cdot h}+0{,}6r\cdot\sqrt{\pi\cdot h}=1{,}3r\cdot\sqrt{\pi\cdot h}$

e) $0{,}2\cdot\sqrt{c^2\cdot B^3}-0{,}1\cdot c\cdot B\cdot\sqrt{4B}=0{,}2\cdot c\cdot B\cdot\sqrt{B}-0{,}2\cdot c\cdot B\cdot\sqrt{B}=0$

f) $\sqrt{3x-3}\cdot\sqrt{x-1}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-1}=\sqrt{3}\cdot(x-1)$

g) $a\cdot\sqrt{\frac{b}{2a}}+b\cdot\sqrt{\frac{a}{2b}}=\sqrt{\frac{a^2\cdot b}{2a}}+\sqrt{\frac{a\cdot b^2}{2b}}=\sqrt{\frac{a\cdot b}{2}}+\sqrt{\frac{a\cdot b}{2}}=2\cdot\sqrt{\frac{a\cdot b}{2}}=\sqrt{2a\cdot b}$

h) $2a\cdot\sqrt{\frac{v^3}{a}}-v\cdot\sqrt{a\cdot v}=2\cdot v\cdot\sqrt{\frac{a^2\cdot v}{a}}-v\cdot\sqrt{a\cdot v}=2\cdot v\cdot\sqrt{a\cdot v}-v\cdot\sqrt{a\cdot v}=v\cdot\sqrt{a\cdot v}$

i) $s\cdot\sqrt{t}+\frac{2s\cdot t}{\sqrt{t}}=s\cdot\sqrt{t}+2s\cdot\sqrt{t}=3s\cdot\sqrt{t}$

2.29 a) $\left(3\cdot\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(2\cdot\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=6\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}-4-9+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=6\cdot\sqrt{6}-4-9+\sqrt{6}=7\cdot\sqrt{6}-13$

b) $\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}\right)^2=x+1-2\cdot\sqrt{(x+1)\cdot(1-x)}+1-x=2-2\cdot\sqrt{1-x^2}=2\cdot\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)$

c) $\left(x\cdot\sqrt{y}-y\cdot\sqrt{x}\right)^2=x^2\cdot y-2x\cdot y\cdot\sqrt{x\cdot y}+x\cdot y^2=x\cdot y\cdot\left(x+y-2\cdot\sqrt{x\cdot y}\right)$

d) $\left(1+\sqrt{a}\right)\cdot\frac{1-a}{1-\sqrt{a}}=\frac{\left(1+\sqrt{a}\right)^2\cdot(1-a)}{\left(1-\sqrt{a}\right)\cdot\left(1+\sqrt{a}\right)}=\frac{\left(1+\sqrt{a}\right)^2\cdot(1-a)}{1-a}=\left(1+\sqrt{a}\right)^2=a+2\cdot\sqrt{a}+1$

e) $x\cdot\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=x\cdot\frac{(x-1)^2}{x}=x^2-2x+1$

f) $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{a}}{2}\right)\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{a}}{2}\right)+\frac{a}{4}=\frac{a^2}{2}-\frac{a}{4}+\frac{a}{4}=\frac{a^2}{2}$

g) $\sqrt{v-1}\cdot\sqrt{\frac{v}{v-1}-v}=\sqrt{v-1}\cdot\sqrt{\frac{v-v\cdot(v-1)}{v-1}}=\sqrt{v-1}\cdot\frac{\sqrt{v-v\cdot(v-1)}}{\sqrt{v-1}}=\sqrt{v-v^2+v}=\sqrt{2v-v^2}$

h) $\sqrt{\frac{1}{m^2}+1}\cdot\frac{\sqrt{m^2+1}}{m}=\frac{\sqrt{1+m^2}}{m}\cdot\frac{\sqrt{m^2+1}}{m}=\frac{m^2+1}{m^2}$

i) $\sqrt{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-x}=\sqrt{\frac{x^2+2x+1-4x}{4}}=\frac{\sqrt{x^2-2x+1}}{2}=\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{2}=\frac{x-1}{2}$

j) $\sqrt{x^2-1}\cdot\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}-\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\right)=\sqrt{x^2-1}\cdot\frac{(x+1)-(x-1)}{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}}=\sqrt{x^2-1}\cdot\frac{2}{\sqrt{x^2-1}}=2$

k) $2\cdot\left(\sqrt{3}-\frac{2+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)=2\cdot\frac{\left(\sqrt{3}+3\right)-\left(2+\sqrt{3}\right)}{1+\sqrt{3}}=\frac{2}{1+\sqrt{3}}=\frac{2\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)}=\frac{2\cdot\left(1-\sqrt{3}\right)}{1-3}=\sqrt{3}-1$

l) $\frac{1-h}{1-\sqrt{h}}-\frac{1+h}{1+\sqrt{h}}=\frac{(1-h)\cdot\left(1+\sqrt{h}\right)-(1+h)\cdot\left(1-\sqrt{h}\right)}{\left(1-\sqrt{h}\right)\cdot\left(1+\sqrt{h}\right)}=$

$=\frac{\left(1-h+\sqrt{h}-h\cdot\sqrt{h}\right)-\left(1+h-\sqrt{h}-h\cdot\sqrt{h}\right)}{1-h}=\frac{-2h+2\cdot\sqrt{h}}{1-h}=2\cdot\frac{h-\sqrt{h}}{h-1}$

2.30 a) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{1+2x}+\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+2x}}=\frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{1+2x}+\frac{x}{\sqrt{1+2x}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+2x+x}{\sqrt{1+2x}}=\frac{1+3x}{2\cdot\sqrt{1+2x}}=\frac{(1+3x)\cdot\sqrt{1+2x}}{2\cdot(1+2x)}$

b) $-\frac{1}{2x^2}\cdot\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+4}}=\frac{-(x^2+4)+x^2}{2x^2\cdot\sqrt{x^2+4}}=-\frac{2}{x^2\cdot\sqrt{x^2+4}}=-\frac{2\cdot\sqrt{x^2+4}}{x^2\cdot\sqrt{x^2+4}\cdot\sqrt{x^2+4}}=$

$=-\frac{2\cdot\sqrt{x^2+4}}{x^2\cdot(x^2+4)}$

c) $\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+1}}}=\frac{\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+1-x^2}{x^2+1}}}=\frac{1}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2+1}}}=$

$=\frac{1}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}}{1}=\frac{1}{x^2+1}$

2.31 $r=\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}$; $h=\frac{1}{\pi\cdot r^2}=\frac{1}{\pi\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{(2\pi)^2}}}=\frac{1}{\pi}\cdot\sqrt[3]{(2\pi)^2}=\sqrt[3]{\frac{4\pi^2}{\pi^3}}=\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}=\sqrt[3]{\frac{8}{2\pi}}=\frac{2}{\sqrt[3]{2\pi}}\quad\Rightarrow\quad h=2r$

2.32

a) $2 \cdot \sqrt{x} = 1$
$4x = 1$
$x = \frac{1}{4};$
Probe: $2 \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} = 1?$
stimmt $\Rightarrow$ $L = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

b) $\sqrt{4x} = 0{,}8$
$4x = 0{,}64$
$x = 0{,}16;$
Probe: $\sqrt{4 \cdot 0{,}16} = 0{,}8\,?$
stimmt $\Rightarrow$ $L = \{0{,}16\}$

c) $\frac{1}{4 \cdot \sqrt{x}} = 0{,}1$
$\frac{1}{16x} = 0{,}01;\ x = \frac{25}{4};$
Probe: $\frac{1}{\cdot\sqrt{25/4}} = 0{,}1\,?$
stimmt = $L = \left\{\frac{25}{4}\right\}$

d) $\sqrt[3]{\frac{x}{5}} = 2$
$\frac{x}{5} = 8$
$x = 40;$
Probe: $\sqrt[3]{\frac{40}{5}} = 2\,?$
stimmt $\Rightarrow L = \{40\}$

e) $\frac{1}{\sqrt[3]{0{,}2 \cdot x}} = 0{,}1$
$\frac{1}{0{,}2 \cdot x} = 0{,}001$
$x = 5000;$
Probe: $\frac{1}{\sqrt[3]{0{,}2 \cdot 5000}} = 0{,}1\,?$
stimmt $\Rightarrow L = \{5000\}$

f) $\sqrt{x+2} = 3$
$x + 2 = 9$
$x = 7;$
Probe: $\sqrt{7+2} = .$
stimmt $\Rightarrow L = \{$

g) $\sqrt[3]{2h+1} = 3$
$2h + 1 = 27$
$h = 13;$
Probe. $\sqrt[3]{2 \cdot 13 + 1} = 3\,?$
stimmt $\Rightarrow L = \{3\}$

h) $2 = \sqrt[4]{1 + \frac{c}{2}}$
$16 = 1 + \frac{c}{2}$
$c = 30;$
Probe: $2 = \sqrt[4]{1 + \frac{30}{2}}\,?$
stimmt $\Rightarrow L = \{30\}$

i) $4 + \sqrt{r+2} = 0$
$\sqrt{r+2} = -4$
$r + 2 = 16;\ r = 14;$
Probe: $4 + \sqrt{14+2} = 0\,?$
stimmt nicht $\Rightarrow L = \{\}$, d.h. keine Lösung!

j) $1 - \sqrt{y-3} = 0$
$\sqrt{y-3} = 1$
$y - 3 = 1;\ y = 4;$
Probe: $1 - \sqrt{4-3} = 0\,?$
stimmt $\Rightarrow L = \{4\}$

2.33

a) $t = 9 + \sqrt{t \cdot (t-6)}$
$t - 9 = \sqrt{t \cdot (t-6)}$
$t^2 - 18t + 81 = t^2 - 6t$
$81 = 12t;\ t = \frac{27}{4};$
Probe:
$\frac{27}{4} = 9 + \sqrt{\frac{27}{4} \cdot \left(\frac{27}{4} - 6\right)}\,?$
stimmt nicht $\Rightarrow L = \{\}$

b) $\sqrt{(t+5) \cdot (t-3)} + 1 = t$
$\sqrt{(t+5) \cdot (t-3)} = t - 1$
$(t+5) \cdot (t-3) = t - 1$
$t^2 + 2t - 15 = t^2 - 2t + 1$
$4t = 16;\ t = 4$
Probe:
$\sqrt{(4+5) \cdot (4-3)} + 1 = 4\,?$
stimmt $\Rightarrow L = \{4\}$

c) $4 \cdot \sqrt{d+3} = 3 \cdot \sqrt{10+d}$
$16 \cdot (d + 3) = 9 \cdot 10 + d)$
$d = 6;$
Probe:
$4 \cdot \sqrt{d+6} = 3 \cdot \sqrt{10+6}\,?$
stimmt $\Rightarrow L = \{6\}$

d) $\sqrt{a+7} = \sqrt{a} + 1$
$a + 7 = a + 2 \cdot \sqrt{a} + 1$
$6 = 2 \cdot \sqrt{a}$
$3 = \sqrt{a};\ a = 9;$
Probe: $\sqrt{9+7} = \sqrt{9} + 1\,?$
stimmt $\Rightarrow L = \{9\}$

e) $\sqrt{19 + \sqrt{2a+12}} = 5$
$19 + \sqrt{2a+12} = 25$
$\sqrt{2a+12} = 6$
$2a + 12 = 36;\ a = 12;$
Probe:
$\sqrt{19 + \sqrt{2 \cdot 12 + 12}} = 5\,?$
stimmt $\Rightarrow L = \{12\}$

f) $3 \cdot \sqrt{4-b} = \sqrt{4-b} + 8$
$2 \cdot \sqrt{4-b} = 8$
$\sqrt{4-b} = 4$
$4 - b = 16;\ b = -12;$
Probe:
$3 \cdot \sqrt{4-(-12)} = \sqrt{4-(-12)} + 8\,?$
stimmt $\Rightarrow L = \{-12\}$

2.33 **g)** $\sqrt{m-5}+2=\sqrt{7+m}$

$m-5+4\cdot\sqrt{m-5}+4=7+m$

$4\cdot\sqrt{m-5}=8$

$\sqrt{m-5}=2$

$m-5=4;\ m=9;$

Probe: $\sqrt{9-5}+2=\sqrt{7+9}$?

stimmt $\Rightarrow L=\{9\}$

h) $\sqrt{u+4}-\sqrt{u-3}+7=0$

$\sqrt{u+4}=\sqrt{u-3}-7$

$u+4=u-3-14\cdot\sqrt{u-3}+49$

$14\cdot\sqrt{u-3}=42$

$\sqrt{u-3}=3$

$u-3=9;\ u=12;$

Probe:

$\sqrt{12+4}-\sqrt{12-3}+7=0$?

stimmt nicht $\Rightarrow L=\{\}$, d.h. keine Lösung!

i) $\sqrt{t+12}=3+\sqrt{t-3}$

$t+12=9+6\cdot\sqrt{t-3}+t-3$

$6=6\cdot\sqrt{t-3}$

$1=\sqrt{t-3}$

$1=t-3;\ t=4;$

Probe: $\sqrt{4+12}=3+\sqrt{4-3}$?

stimmt $\Rightarrow L=\{4\}$

j) $2\cdot\left(1+\sqrt{x-10}\right)=\sqrt{4x-12}$

$2\cdot\left(1+\sqrt{x-10}\right)=2\cdot\sqrt{x-3}$

$1+\sqrt{x-10}=\sqrt{x-3}$

$1+2\cdot\sqrt{x-10}+x-10=x-3$

$2\cdot\sqrt{x-10}=6$

$\sqrt{x-10}=3$

$x-10=9;\ x=19;$

Probe:

$2\cdot\left(1+\sqrt{19-10}\right)=\sqrt{4\cdot 19-12}$?

stimmt $\Rightarrow L=\{19\}$

k) $\sqrt{m-10}+1=\sqrt{m-3}$

$\sqrt{m-10}+1=\sqrt{m-3}$

$m-10+2\cdot\sqrt{m-10}+1=m-3$

$2\cdot\sqrt{m-10}=6$

$\sqrt{m-10}=3$

$m-10=9;\ m=19;$

Probe: $\sqrt{19-10}+1=\sqrt{19-3}$?

stimmt $\Rightarrow L=\{19\}$

l) $9=\sqrt{z+8}+\sqrt{z-1}$

$9-\sqrt{z-1}=\sqrt{z+8}$

$81-18\cdot\sqrt{z-1}+z-1=z+8$

$72=18\cdot\sqrt{z-1}$

$4=\sqrt{z-1}$

$16=z-1;\ z=17;$

Probe: $9=\sqrt{17+8}+\sqrt{17-1}$?

stimmt $\Rightarrow L=\{17\}$

2.34 **a)** $\sqrt{x-8}+\frac{1}{\sqrt{x-8}}=\sqrt{x-5}\quad|\cdot\sqrt{x-8}$

$x-8+1=\sqrt{(x-8)\cdot(x-5)}$

$x-7=\sqrt{x^2-13x+40}$

$x^2-14x+49=x^2-13x+40$

$x=9;$

Probe: $\sqrt{9-8}+\frac{1}{\sqrt{9-8}}=\sqrt{9-5}$?

stimmt $\Rightarrow L=\{9\}$

b) $\sqrt{\frac{1}{h}}-\sqrt{h}=\sqrt{h+1}\quad|\cdot\sqrt{h}$

$1-h=\sqrt{h\cdot(h+1)}$

$1-2h+h^2=h^2+h$

$1=3h;\quad h=\frac{1}{3}$

Probe: $\sqrt{\frac{1}{1/3}}-\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{1}{3}+1}$? $\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4}{3}}$,

$\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$; stimmt $\Rightarrow L=\left\{\frac{1}{3}\right\}$

c) $\sqrt{5+a}+\sqrt{a}=\sqrt{4a+9}$

$5+a+2\cdot\sqrt{(5+a)\cdot a}+a=4a+9$

$2\cdot\sqrt{5a+a^2}=2a+4$

$\sqrt{5a+a^2}=a+2$

$5a+a^2=a^2+4a+4$

$a=4;$

Probe: $\sqrt{5+4}+\sqrt{4}=\sqrt{4\cdot 4+9}$?

stimmt $\Rightarrow L=\{4\}$

d) $\frac{5}{3}\cdot\sqrt{r-10}+\frac{2}{3}\cdot\sqrt{r-13}=\sqrt{2+r}\quad|\cdot 3$

$5\cdot\sqrt{r-10}+2\cdot\sqrt{r-13}=3\cdot\sqrt{2+r}$

$25\cdot(r-10)+20\cdot\sqrt{(r-10)\cdot(r-13)}+4\cdot(r-13)=9\cdot(2+r)$

$25r-250+20\cdot\sqrt{r^2-23r+130}+4r-52=18+9r$

$20\cdot\sqrt{r^2-23r+130}=-20r+320$

$\sqrt{r^2-23r+130}=16-r$

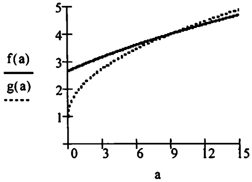
$r^2-23r+130=256-32r+r^2$

$9r=126;\ r=14;$

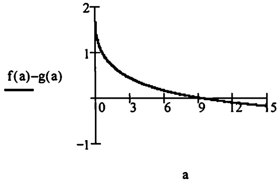
Probe: $\frac{5}{3}\cdot\sqrt{14-10}+\frac{2}{3}\cdot\sqrt{14-13}=\sqrt{2+14}$?

stimmt $\Rightarrow L=\{14\}$

2.35 Wir setzen $f(a)=\sqrt{a+7}$ und $g(a)=\sqrt{a}+1$ und lösen graphisch die Gleichung f(a) = g(a) oder f(a) – g(a) = 0. f(a) ist nur sinnvoll für $a + 7 \geq 0$ oder $a \geq -7$, g(a) nur für $a \geq 0$; daher braucht nur der Bereich $a \geq 0$ untersucht werden.

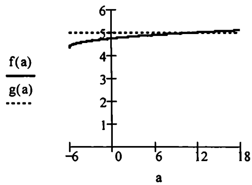


a = 9 ist die Stelle, an der die Graphen y = f(a) und y = g(a) einander schneiden

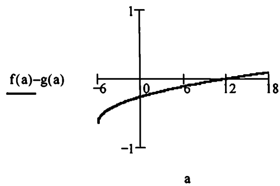


a = 9 ist die Nullstelle der Funktion y = f(a) – g(a)

Wir setzen $f(a)=\sqrt{19+\sqrt{2a+12}}$ und g(a) = 5. Zu lösen ist nun die Gleichung f(a) = g(a). f(a) ist nur sinnvoll für $a \geq -6$, weshalb nur dieser Bereich untersucht werden braucht.



a = 12 ist die Stelle, an der die Graphen y = f(a) und y = g(a) einander schneiden



a = 12 ist die Nullstelle der Funktion y = f(a) – g(a)

2.37

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{L\cdot C}} \quad |\cdot\sqrt{L\cdot C}\,|:\omega_0$$

$$\sqrt{L\cdot C}=\frac{1}{\omega_0} \quad |\ldots^2$$

$$L\cdot C=\frac{1}{\omega_0^2}$$

$$L=\frac{1}{\omega_0^2\cdot C}$$

2.38

$$Z=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$Z^2=R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2$$

$$R^2=Z^2-\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2$$

$$R=\sqrt{Z^2-\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

2.39

$$T=2\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{k}} \quad |:2\pi$$

$$\frac{T}{2\pi}=\sqrt{\frac{m}{k}} \quad |\ldots^2$$

$$\frac{T^2}{4\pi^2}=\frac{m}{k}$$

$$\frac{k}{m}=\frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$k=\frac{4\pi^2\cdot m}{T^2}$$

2.40 $a = 14{,}2\text{ cm};\ U = 56{,}6\text{ cm};\ c = \sqrt{a^2+b^2}\ ,\ U = a+b+c$

$56{,}6 = 14{,}2 + b + \sqrt{14{,}2^2+b^2}\ ;\ 42{,}4 - b = \sqrt{201{,}64+b^2}\ ;\ 1797{,}76 - 84{,}8\cdot b + b^2 = 201{,}64 + b^2;$

$1596{,}12 = 84{,}8\ b;\ \ b = 18{,}8\text{ cm}$

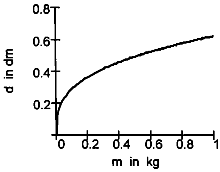
2.41 Man liest ab, dass der Graph der Wurzelfunktion $y = \sqrt[n]{x}$ für $x = 16$ den Wert $y = 2$ hat. Somit: $2 = \sqrt[n]{16}$. Daraus kann man schon ersehen, dass $n = 4$. Man kann diese Gleichung aber auch zur n-ten Potenz erheben: $2^n = 16$; daraus $n = 4$.

2.42 Kugeldurchmesser in dm, Kugelmasse in kg:

$$V_{Kugel} = \frac{\pi}{6}\cdot d^3$$

$$m = V\cdot\rho = \frac{\pi}{6}\cdot d^3\cdot 7{,}85 = 4{,}11\cdot d^3$$

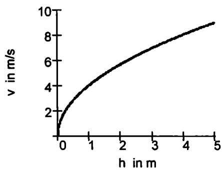
$$d = \sqrt[3]{\frac{m}{4{,}11}} = \frac{\sqrt[3]{m}}{\sqrt[3]{4{,}11}} = 0{,}624\cdot\sqrt[3]{m}$$



2.43 h in m, v in m/s:

$$v = \mu\cdot\sqrt{2g\cdot h} = \mu\cdot\sqrt{2g}\cdot\sqrt{\cdot h} \approx$$

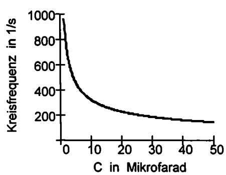
$$\approx 0{,}9\cdot\sqrt{2\cdot 10}\cdot\sqrt{\cdot h} = 4{,}02\cdot\sqrt{\cdot h}$$



2.44 Kreisfrequenz ω_0 in 1/s, C in µF:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L\cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{1\cdot 10^{-6}\cdot C(\text{in }\mu F)}} =$$

$$= \frac{1}{10^{-3}\cdot\sqrt{C(\text{in }\mu F)}} = \frac{1000}{\sqrt{C(\text{in }\mu F)}}\,.$$

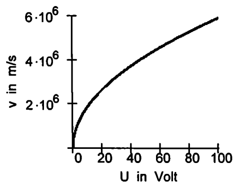


2.45 U in Volt, v in m/s:

$$v = \sqrt{\frac{2QU}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}603\cdot 10^{-19}\cdot U}{9{,}109\cdot 10^{-31}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}603\cdot 10^{-19}}{9{,}109\cdot 10^{-31}}}\cdot\sqrt{U} = \sqrt{0{,}352\cdot 10^{12}}\cdot\sqrt{U} =$$

$$= \sqrt{0{,}352\cdot 10^{12}}\cdot\sqrt{U} = 0{,}593\cdot 10^{6}\cdot\sqrt{U}$$



3 Quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen

3.1 Die Funktionsgleichung muss auf die Form $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit $a \neq 0$ gebracht werden können.
a) ja: $a = -1$, $b = 2$, $c = 0$ **b)** ja: $a = 3$, $b = -1$, $c = 2$ **c)** nein, a darf nicht null sein
d) ja: $a = -1$, $b = 0$, $c = 1$ **e)** nein
f) ja: $a = 1$; $b = 0{,}3$; $c = -0{,}1$ **g)** ja: $a = 4$, $b = -4$, $c = 1$
h) nein, denn die Form $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit $a \neq 0$ ist nicht möglich

3.2 **a)** $y = \frac{1}{2} \cdot (0-3)^2 + 1 = \frac{11}{2}$; $P\left(0 / \frac{11}{2}\right)$ **b)** $y = \frac{1}{2} \cdot (-3-3)^2 + 1 = 19$; Q(-3/19)
c) R(3/1) **d)** $T\left(4 / \frac{3}{2}\right)$

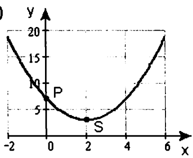
3.3 Die Koordinaten x und y des Punktes müssen die Parabelgleichung $y = -2x^2 - 3x + 1$ erfüllen.
a) $2 = -2 \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) + 1$, wahre Aussage: P(-1/2) liegt auf der Parabel
b) $-4 = -2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1$, wahre Aussage: Q(1/-4) liegt auf der Parabel
c) $-1 = = -2 \cdot 0^2 - 3 \cdot 0 + 1$, falsche Aussage: R(0/-1) liegt nicht auf der Parabel
d) $-13 = -2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1$, wahre Aussage: T(2/-13) liegt auf der Parabel

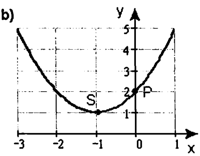
3.4 **a)** $y = x^2 + 3$ **b)** $y = x^2 - 2$ **c)** $y = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$
e) $y = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$ **f)** $y = (x-1)^2 + 2 = x^2 - 2x + 3$ **g)** $(x+1)^2 - 3 = x^2 + 2x - 2$

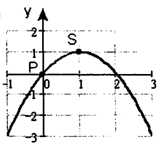
3.5 **a)** $y = x^2 + 1$ **b)** $y = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$ **c)** $y = (x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$
d) $y = (x-3)^2 - 1 = x^2 - 6x + 8$ **e)** $y = (x+2)^2 - 3 = x^2 + 4x + 1$ **f)** $y = (x+3)^2 + 1 = x^2 + 6x + 10$

3.6 **a)** Parabel nach oben offen **b)** Parabel nach unten offen
c) Parabel nach oben offen, schmäler als die Grundparabel
d) Parabel nach oben offen, breiter als die Grundparabel
e) y-Achse ist die Parabelachse
f) Parabel geht durch den Koordinatenursprung
g) Der Parabelscheitel liegt im Koordinatenursprung

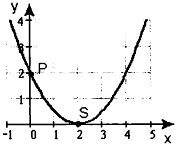
3.7 Scheitelform: $y = a \cdot (x - m)^2 + n$ mit S(m/n) als Scheitel. Liegt der Scheitel im Ursprung, so ist $m = n = 0$. Die Parabel hat somit die Gleichung $y = a \cdot x^2$.
a) $2 = a \cdot 1 \Rightarrow y = 2x^2$ **b)** $2 = a \cdot 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot x^2$ **c)** $-3 = a \cdot 9 \Rightarrow y = -\frac{1}{3} \cdot x^2$
d) $3 = a \cdot 1 \Rightarrow y = 3 \cdot x^2$ **e)** $-2 = a \cdot 4 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot x^2$

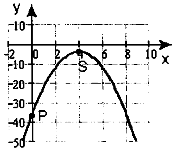
3.8 a)


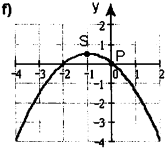
b)


c)


a) $y = x^2 - 4x + 7 = x^2 - 4x + 4 - 4 + 7 = (x-2)^2 + 3 \Rightarrow$ S(2/3); $x = 0 \Rightarrow y = 7$; P(0/7)
b) $y = x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2x + 1 - 1 + 2 = (x+1)^2 + 1 \Rightarrow$ S(-1/1); $x = 0 \Rightarrow y = 2$; P(0/2)
c) $y = -x^2 + 2x = -(x^2 - 2x + 1 - 1) = -(x-1)^2 + 1 \Rightarrow$ S(1/1); $x = 0 \Rightarrow y = 0$; P(0/0)

3.8 d)


e)


f)


d) $y = 0{,}5\cdot x^2 - 2x + 2 = 0{,}5\cdot(x^2 - 4x + 4 - 4) + 2 = 0{,}5\cdot(x^2 - 4x + 4) - 2 + 2 = 0{,}5\cdot(x\text{-}2)^2 \Rightarrow S(2/0)$;
$x = 0 \Rightarrow y = 2$; $P(0/2)$

e) $y = -2x^2 + 16x - 36 = -2\cdot(x^2 - 8x + 16 - 16) - 36 = -2\cdot(x^2 - 8x + 16) + 32 - 36 = -2\cdot(x\text{-}4)^2 - 4$
$\Rightarrow S(4/-4)$; $x = 0 \Rightarrow -36$; $P(0/-36)$

f) $y = -0{,}5\cdot x^2 - x = -0{,}5\cdot(x^2 + 2x + 1 - 1) = -0{,}5\cdot(x^2 + 2x + 1) + 0{,}5 = -0{,}5\cdot(x + 1)^2 + 0{,}5$
$\Rightarrow S(-1/0{,}5)$; $x = 0 \Rightarrow P(0/0)$

3.9 Man liest zuerst die Koordinaten des Parabelscheitels ab. Danach wird der y-Achsenabschnitt c oder a abgelesen (siehe Beispiel 3.4, Lehrbuch Seite 41 bzw. die Seite davor). Statt c oder a abzulesen, kann auch ein Parabelpunkt genommen werden, der gut abgelesen werden kann.

a) $m = 2, n = 0$ sowie $a = 1 \Rightarrow y = a\cdot(x - m)^2 + n = 1\cdot(x\text{-}2)^2 + 0 = x^2 - 4x + 4$; $a = 1, b = -4, c = 4$

b) $m = -2, n = 2, c = 0 \Rightarrow y = a\cdot(x + 2)^2 + 2$; $x = 0$: $y = 4a + 2 = c = 0$, daraus $a = -\frac{1}{2}$.

$y = -\frac{1}{2}\cdot(x + 2)^2 + 2 = -\frac{1}{2}\cdot x^2 - 2x$; $a = -\frac{1}{2}, b = -2, c = 0$

c) $m = 0, n = -4, a = 2 \Rightarrow y = 2\cdot(x + 0)^2 - 4 = 2x^2 - 4$; $a = 2, b = 0, c = -4$

d) $m = -1, n = 4$, sowohl c wie auch a sind nicht genau ablesbar, jedoch der Punkt mit den Koordinaten $x = 2$ und $y = 1 \Rightarrow y = a\cdot(x + 1)^2 + 4$; $1 = a\cdot(2 + 1)^2 + 4$, daraus $a = -\frac{1}{3}$.

$y = -\frac{1}{3}\cdot(x + 1)^2 + 4 = -\frac{1}{3}\cdot x^2 - \frac{2}{3}\cdot x + \frac{11}{3}$; $a = -\frac{1}{3}$, $b = -\frac{2}{3}, c = \frac{11}{3}$

e) $m = -1, n = 4, a = -2 \Rightarrow y = -2\cdot(x + 1)^2 + 4 = -2x^2 - 4x + 2$; $a = -2, b = -4, c = 2$

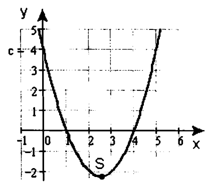
f) $m = 2, n = -3, c = 5 \Rightarrow y = a\cdot(x - 2)^2 - 3$; $x = 0$: $y = a\cdot 4 - 3 = c = 5$, daraus $a = 2$;
$y = 2\cdot(x - 2)^2 - 3 = 2x^2 - 8x + 5$; $a = 2, b = -8, c = 5$

3.10 a) 1. Art: Zeichnen der Parabel nach Bestimmung ihres Scheitels:

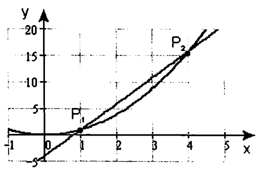
$$y = x^2 - 5x + 4 = x^2 - 2\cdot\frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 4 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4};$$

$S\left(\frac{5}{2}\Big/-\frac{9}{4}\right)$; mit $c = 4$ kann nun die Parabel gezeichnet werden.

Man liest als Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$ ab.
Kontrolle: $y = 1^2 - 5\cdot 1 + 4 = 0$; $y = 4^2 - 5\cdot 4 + 4 = 0$.



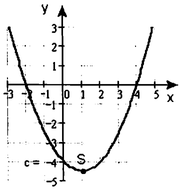
2. Art: Man schreibt die Gleichung $x^2 - 5x + 4 = 0$ in der Form $x^2 = 5x - 4$. Zeichnerisch ermittelt man nun die Schnittstellen der Parabel $y = x^2$ und der Geraden $y = 5x - 4$. Beide können rasch gezeichnet werden. Die x - Koordinaten der Schnittpunkte P_1 und P_2 sind die gesuchten Nullstellen: $x_1 = 1, x_2 = 4$.
Kontrolle: $1^2 = 5\cdot 1 - 4$; $4^2 = 5\cdot 4 - 4$.



3.10 b) 1. Art: $y = \frac{1}{2} \cdot x^2 - x - 4 = \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 - 2x - 8\right) =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(x^2 - 2x + 1 - 1 - 8\right) =$$

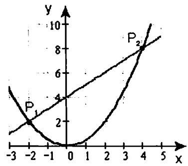
$$= \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 2x + 1) - \frac{9}{2} = \frac{1}{2} \cdot (x-1)^2 - \frac{9}{2};$$



Parabel mit dem Scheitel: $S\left(1/-\frac{9}{2}\right)$ und $a = \frac{1}{2}$, $c = -4$.

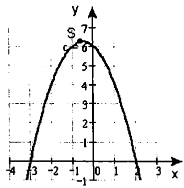
Nullstellen aus der Graphik: $x_1 = -2$, $x_2 = 4$.

2. Art: $\frac{1}{2} \cdot x^2 = x + 4$: Schnitt der Parabel $y = \frac{1}{2} \cdot x^2$ mit der Geraden $y = x + 4$.
Schnittstellen aus der Graphik: $x_1 = -2$, $x_2 = 4$.



c) 1. Art: $y = -x^2 - x + 6 = -(x^2 + x - 6) =$

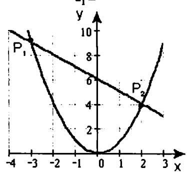
$$= -(x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\, x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 6) = -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4};$$



Parabel mit dem Scheitel: $S\left(-\frac{1}{2}/\frac{25}{4}\right)$ und $a = -1$, $c = 6$.

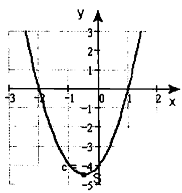
Nullstellen aus der Graphik: $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.

2. Art: $x^2 = -x + 6$:
Schnitt der Parabel $y = x^2$ mit der Geraden $y = -x + 6$.
Schnittstellen aus der Graphik: $x_1 = -3$, $x_2 = 2$.



d) 1. Art: $y = 2x^2 + 2x - 4 = 2 \cdot (x^2 + x - 2) =$

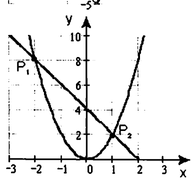
$$= 2 \cdot (x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\, x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 2) = 2 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{2};$$



Parabel mit dem Scheitel: $S\left(-\frac{1}{2}/-\frac{9}{2}\right)$ und $a = 2$, $c = -4$.

Nullstellen aus der Graphik: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

2. Art: $2x^2 = -2x + 4$:
Schnitt der Parabel $y = 2x^2$ mit der Geraden $y = -2x + 4$.
Schnittstellen aus der Graphik: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.



3.11 a)

I: $35{,}5 = 9a - 3b + c$
II: $-11{,}5 = a - b + c$
III: $\underline{2 = 4a + 2b + c}$

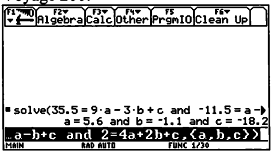
III $\Rightarrow$ $c = 2 - 4a - 2b$, Einsetzen in I und II:
I*: $33{,}5 = 5a - 5b$
II*: $\underline{-13{,}5 = -3a - 3b}$

Vereinfachen:
I**: $6{,}7 = a - b$
II**: $\underline{4{,}5 = a + b}$

$\Rightarrow a = 5{,}6;\; b = -1{,}1;\; c = 2 - 4a + 2b = -18{,}2;$

$y = 5{,}6x^2 - 1{,}1x - 18{,}2$

Voyage 200:



Mathcad:

Vorgabe

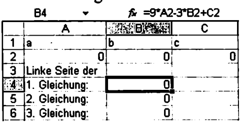
$35.5 = 9\cdot a - 3\cdot b + c$

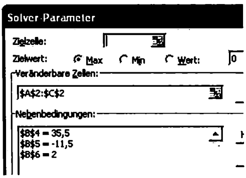
$-11.5 = a - b + c$

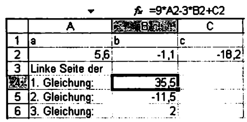
$2 = 4\cdot a + 2\cdot b + c$

$$\text{Suchen}(a,b,c) \rightarrow \begin{pmatrix} 5.60000000000000000000 \\ -1.10000000000000000000 \\ -18.2000000000000000000 \end{pmatrix}$$

Excel: Lösung mittels Solver







b) I: $20 = 4a + 2b + c$
II: $-4 = 4a - 2b + c$
III: $\underline{-4 = c}$
$\Rightarrow a = 3;\; b = 6;\; c = -4;$
$y = 3x^2 + 6x - 4$

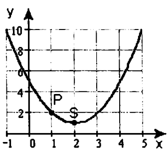
c) I: $5 = a + b + c$
II: $-31 = 9a - 3b + c$
III: $\underline{-16 = 4a - 2b + c}$
$\Rightarrow a = -2;\; b = 5;\; c = 2;$
$y = -2x^2 + 5x + 2$

d) I: $-24 = 4a - 2b + c$
II: $8 = 4a + 2b + c$
III: $\underline{-10 = a - b + c}$
$\Rightarrow a = -2;\; b = 8;\; c = 0;$
$y = -2x^2 + 8x$

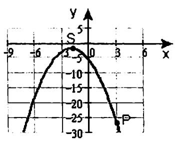
e) I: $6 = 4a - 2b + c$
II: $3 = a - b + c$
III: $\underline{27 = 25a + 5b + c}$
$\Rightarrow a = 1;\; b = 0;\; c = 2;$
$y = x^2 + 2$

f) I: $2 = 4a - 2b + c$
II: $10 = 4a + 2b + c$
III: $\underline{37 = 25a + 5b + c}$
$\Rightarrow a = 1;\; b = 2;\; c = 2;$
$y = x^2 + 2x + 2$

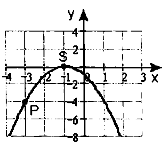
3.12 **a)** $y = a\cdot(x - m)^2 + n =$
$y = a\cdot(x - 2)^2 + 1;$
P(1/2):
$2 = a\cdot(1 - 2)^2 + 1$
$\Rightarrow a = 1;$
$y = (x-2)^2 + 1 =$
$= x^2 - 4x + 5$



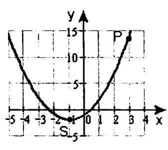
b) $y = a\cdot(x - m)^2 + n =$
$y = a\cdot(x + 2)^2 - 2;$
P(3/-27):
$-27 = a\cdot(3 + 2)^2 - 2$
$\Rightarrow a = -1;$
$y = -(x+2)^2 - 1 =$
$= -x^2 - 4x - 6$



c) $y = a\cdot(x - m)^2 + n =$
$y = a\cdot(x + 1)^2;$
P(-3/-4):
$-4 = a\cdot(-3 + 1)^2$
$\Rightarrow a = -1;$
$y = -(x + 1)^2 =$
$= -x^2 - 2x - 1$



d) $y = a\cdot(x - m)^2 + n =$
$y = a\cdot(x + 1)^2 - 2;$
P(3/14):
$14 = a\cdot(3 + 1)^2 - 2$
$\Rightarrow a = 1;$
$y = (x+1)^2 - 2 =$
$= x^2 + 2x - 1$



3.13 **a)** S(2/0) als Minimum; y - Änderung von x = 2 auf x = 3: a = 0,5;

$y = \frac{1}{2} \cdot (x-2)^2 = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 2x + 2$; Kontrolle: c = 2 als y – Wert für x = 0 laut Tabelle

b) S(-2/-4) als Maximum; y - Änderung von x = – 2 auf x = -1: a = –2;

$y = -2 \cdot (x+2)^2 - 4 = -2x^2 - 8x - 12$; Kontrolle: c = -12 als y-Wert für x = 0 laut Tabelle

c) S(1/1) als Maximum; y - Änderung von x = 1 auf x = 2: a = –1;

$y = -(x-1)^2 + 1 = -x^2 + 2x$; Kontrolle: c = 0 als y-Wert für x = 0 laut Tabelle

d) S(-1/1) als Minimum; y - Änderung von x = –1 auf x = 0: a = 1;

$y = (x+1)^2 + 1 = x^2 + 2x + 2$; Kontrolle: c = 2 als y-Wert für x = 0 laut Tabelle

3.14 Parabelgleichung $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

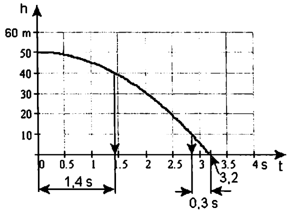
a) (–2/1) ⇒ I: 1 = 4a – 2b + c
(1/4) ⇒ II: 4 = a + b + c
(4/25) ⇒ <u>III: 25 = 16a + 4b + c</u>
II: c = 4–a–b, in I und III einsetzen:
I*: –3 = 3a – 3b
<u>III*: 21 = 15a + 3b</u>
Vereinfachen:
I**: –1 = a – b
<u>III**: 7 = 5a + b</u>
⇒ a = 1, b = 2, c = 4–a–b = 1;
$y = x^2 + 2x + 1$.

b) (0/3) ⇒ c = 3; daher: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + 3$.
Es brauchen nur noch a und b bestimmt werden.
(–1/6) ⇒ I: 6 = a – b + 3
(1/–6) ⇒ <u>II: –6 = a + b + 3</u>
⇒ a = –3, b = –6;
$y = -3x^2 - 6x + 3$.
Kontrolle: a = -3 als Änderung des y-Wertes von x = m = -1 auf x = 0

c) (2/0,25) ⇒ I: 0,25 = 4a + 2b + c
(3/0) ⇒ II: 0 = 9a + 3b + c
(4/0,25) ⇒ <u>III: 0,25 = 16a +4b + c</u>
⇒ a = 0,24; b = –1,5; c = 2,25
$y = 0{,}25 \cdot x^2 - 1{,}5 \cdot x + 2{,}25$.
Kontrolle: a = 0,25 als Änderung des y-Wertes von x = m = 3 auf x = 4

d) (0/8) ⇒ c = 8; daher: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + 8$.
Es brauchen nur noch a und b bestimmt werden.
(1/18) ⇒ I: 18 = a + b + 8
(2/32) ⇒ <u>II: 32 = 4a + 2b + 8</u>
⇒ a = 2, b = 8;
$y = 2 \cdot x^2 + 8 \cdot x + 8$

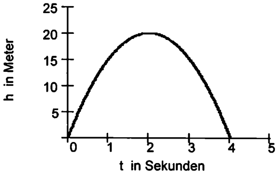
3.15 **a)**



b) Etwa 3,2 s

c) Etwa 1,4 s für die ersten 10 Meter;
etwa 0,3 s für die letzten 10 Meter

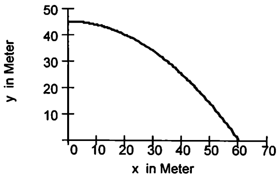
3.16 **a)**



b) Maximale Wurfhöhe: 20 m
zugehörige Steigzeit: 2 s;
Flugzeit insgesamt: 4 s

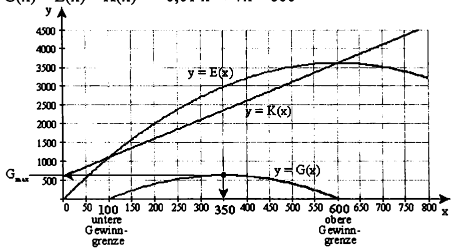
c) $h = 20 \cdot t - 5 \cdot t^2$ ... Gleichung der Parabel; die Steigzeit und die maximale Wurfhöhe sind die Koordinaten ihres Scheitels S(m/n):
$h = -5 \cdot (t^2 - 4t + 4 - 4) = -5 \cdot (t^2 - 4t + 4) + 20 = -5 \cdot (t-2)^2 + 20 \Rightarrow m = 2, n = 20.$
Daher: Steigzeit 2 s, maximale Wurfhöhe 20 m.

3.17 **a)**



b) Rechnerisch:
Nullstelle von $y = H - \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2 = 45 - \frac{1}{80} \cdot x^2 = 0$
$\Rightarrow x = +\sqrt{45 \cdot 80} = 60$ m.
Graphisch unmittelbar aus der Abbildung.

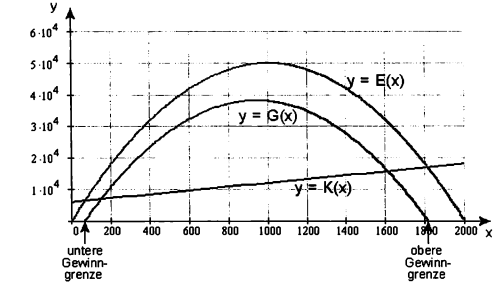
3.18 a) $E(x) = p \cdot x = -0{,}01 \cdot x^2 + 12 \cdot x \Rightarrow$ Nachfragefunktion $p = -0{,}01 \cdot x + 12$ oder $x = -100 \cdot p + 1200$
b) $G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}01 \cdot x^2 + 7x - 600$



c) Gewinngrenzen: $x_1 = 100$ Mengeneinheiten sowie $x_2 = 600$ Mengeneinheiten; maximaler Gewinn: ≈ 600 Geldeinheiten (genauer: 625 Geldeinheiten) bei x = 350 Mengeneinheiten;
d) Zwischen x = 100 Mengeneinheiten und x = 600 Mengeneinheiten übersteigt der Erlös die Kosten; dies bedeutet Gewinn.

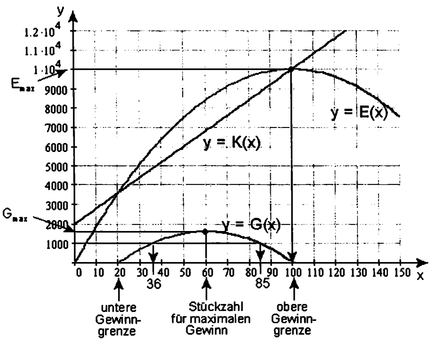
3.19 **a)** p = 5 €: $x = 2000 - 20 \cdot 5 = 1900$ Schalter; p = 8 €: x = 1840 Schalter
b) $x = 2000 - 20 \cdot p \Rightarrow p = -0{,}05 \cdot x + 100$; $E(x) = p \cdot x = -0{,}05 \cdot x^2 + 100 \cdot x$;
$G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}05 \cdot x^2 + 94 \cdot x - 6000$

3.19 **c)** $G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}01 \cdot x^2 + 7x - 600$



d) Gewinn etwa zwischen x = 70 und x = 1810 Schaltern (genau: 67 und 1813)

3.20



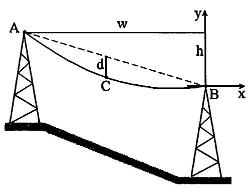
a) Gewinngrenzen: 20 Stück und 100 Stück

b) 60 Stück, 1600 Geldeinheiten

c) 36 und 85 Stück

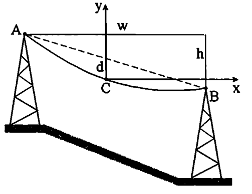
d) 100 Stück

3.21 **a)**



w = 300; h = 22; d = 8,5;
A(–300/22), B(0/0), D(–150/11)
e = 11 – 8,5 = 2,5 $\Rightarrow$ C(–150/2,5)
$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$; c = 0;
I: 22 = 90000a – 300b
<u>II: 2,5 = 22500a – 150b</u>
$\Rightarrow \; a = \frac{17}{45000} = 0{,}000378; \; b = \frac{1}{25} = 0{,}04;$
$y = 0{,}000378 \cdot x^2 + 0{,}04 \cdot x$

b)



C(0/0), B(150/–2,5), A(–150/19,5)
$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$;
c = 0;
I: 19,5 = 22500a – 150b
<u>II: -2,5 = 22500a + 150b</u>
$\Rightarrow \; a = \frac{17}{45000} = 0{,}000378; \; b = -\frac{11}{150} = -0{,}733;$
$y = 0{,}000378 \cdot x^2 - 0{,}733 \cdot x$

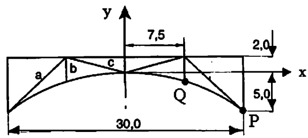
3.22 Annahme eines günstig liegenden Koordinatensystems laut Abbildung;

$P(15/-5)$; $y = k \cdot x^2$ (k statt a, da a die Länge einer Stütze ist); $-5 = k \cdot 15^2 \Rightarrow k = -\frac{1}{45}$;

$Q(7{,}5/y_0)$; $y_0 = -\frac{1}{45} \cdot 7{,}5^2 = -\frac{5}{4}$;

$b = 2 + 1{,}25 = 3{,}25$ m;

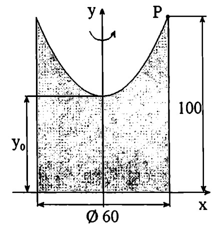
$a^2 = 7{,}5^2 + 7^2 \Rightarrow a = 10{,}26$ m; $c^2 = 7{,}5^2 + 2^2 \Rightarrow c = 7{,}76$ m



3.23 $y = y_0 + \frac{\omega^2}{2g} \cdot x^2 = y_0 + \frac{1}{20} \cdot x^2$;

$P(30/100) \Rightarrow 100 = y_0 + \frac{1}{20} \cdot 30^2 \Rightarrow y_0 = 55.$

Der Flüssigkeitsspiegel in der Zylinderachse sinkt auf eine Höhe von 55 mm, also um 100 – 55 = 45 mm ab.



3.24 **a)** $y = a \cdot v^2 + b \cdot v + c$;

I: $3{,}0 = 30^2 \cdot a + 30 \cdot b + c$

II: $4{,}1 = a \cdot 80^2 + b \cdot 80 + c$

III: $\underline{7{,}0 = a \cdot 120^2 + 120 \cdot b + c}$

$\Rightarrow a = 0{,}000561$; $b = -0{,}0397$; $c = 3{,}69$;

$y = 0{,}000561 \cdot v^2 - 0{,}0397 \cdot v + 3{,}69$

b) $y = a \cdot v^2 + b \cdot v + c$;

I: $6{,}9 = 30^2 \cdot a + 30 \cdot b + c$

II: $9{,}0 = a \cdot 100^2 + b \cdot 100 + c$

III: $\underline{13{,}5 = a \cdot 140^2 + 140 \cdot b + c}$

$\Rightarrow a = 0{,}00075$; $b = -0{,}0678$; $c = 8{,}25$;

$y = 0{,}00075 \cdot v^2 - 0{,}06778 \cdot v + 8{,}25$

c) $y = a \cdot v^2 + b \cdot v + c$;

I: $4{,}6 = 30^2 \cdot a + 30 \cdot b + c$

II: $5{,}4 = a \cdot 80^2 + b \cdot 80 + c$

III: $\underline{8{,}2 = a \cdot 120^2 + 120 \cdot b + c}$

$\Rightarrow a = 0{,}0006$; $b = -0{,}05$; $c = 5{,}56$;

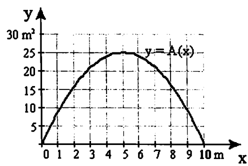
$y = 0{,}0006 \cdot v^2 - 0{,}05 \cdot v + 5{,}56$

3.25 Seiten (in m): x, $10 - x$; $A(x) = x \cdot (10 - x) = -x^2 + 10x$; dies ist die Gleichung einer sich nach unten öffnenden Parabel; der Flächeninhalt A(x) ist im Scheitel der Parabel am größten.

$A(x) = -x^2 + 10x = -(x^2 - 2 \cdot 5x + 25 - 25) =$

$= -(x^2 - 2 \cdot 5x + 25) + 25 = -(x-5)^2 + 25$;

Scheitel (5/25) $\Rightarrow x_{max} = 5$ m. Die beiden Seiten haben somit die Längen 5 m und $10 - x_{max} = 5$ m, Quadrat mit dem Flächeninhalt 25 m^2 !



3.26 Kathetenlängen (in cm) x, $30 - x$;

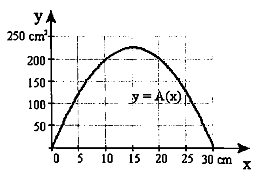
$A(x) = x \cdot (30 - x) = -x^2 + 30x$; dies ist die Gleichung einer sich nach unten öffnenden Parabel; der Flächeninhalt A(x) ist im Scheitel der Parabel am größten.

$A(x) = -x^2 + 30x = -(x^2 - 2 \cdot 15 \cdot x + 225 - 225) =$

$= -(x^2 - 2 \cdot 5x + 225) + 225 = -(x-15)^2 + 225$;

Scheitel (15/225) $\Rightarrow x_{max} = 15$ cm.

Katheten: 15 cm und $30 - x_{max} = 15$ cm. Rechtwinklig gleichschenkliges Dreieck mit dem Flächeninhalt 225 cm^2.



3.27 **a)** $u^2 = 36 \Rightarrow u_1 = -6\ ;\ u_2 = +6$

b) $x^2 + x = x\cdot(x+1) = 0$; Produkt–Null–Satz $\Rightarrow x = 0, x + 1 = 0$; d. h. $x_1 = 0\ ;\ x_2 = -1$

c) $x^2 - 4x = x\cdot(x-4) = 0$; Produkt–Null–Satz $\Rightarrow x = 0, x - 4 = 0$; d.h. $x_1 = 0\ ;\ x_2 = 4$

d) $3x\cdot(x + 6) = 0$; Produkt–Null–Satz $\Rightarrow 3x = 0, x + 6 = 0$; d.h. $x_1 = 0\ ;\ x_2 = -6$

e) $3x^2 - 6x = 3x\cdot(x - 2) = 0$; Produkt–Null–Satz $\Rightarrow 3x = 0, x - 2 = 0$, d.h. $x_1 = 0\ ;\ x_2 = 2$

f) $5t^2 - 10t = 5t\cdot(t - 2) = 0$; Produkt–Null–Satz $\Rightarrow t_1 = 0\ ;\ t_2 = 2$

g) $3d - d^2 = d\cdot(3 - d) = 0$; Produkt–Null–Satz $\Rightarrow d_1 = 0\ ;\ d_2 = 3$

h) $3x^2 - 12x = 3x\cdot(x - 4) = 0$; Produkt–Null–Satz $\Rightarrow x_1 = 0\ ;\ x_2 = 4$

i) $(x - 4)^2 = 0$; Produkt–Null–Satz $x_1 = x_2 = 4$

j) $(a + 3)^2 = 4 \Rightarrow a + 3 = 2$ sowie $a + 3 = -2$, d.h. $a_1 = -1\ ;\ a_2 = -5$

k) $(t - 12)^2 = 169 \Rightarrow t - 12 = 13$ sowie $t - 12 = -13$, d.h. $t_1 = 25\ ;\ t_2 = -1$

l) $(a + 4)^2 = 81 \Rightarrow a + 4 = \pm 9$, d.h. $a_1 = -13\ ;\ a_2 = 5$

m) $(2a + 4)^2 = 16 \Rightarrow 2a + 4 = \pm 4$, d.h. $a_1 = -4\ ;\ a_2 = 0$

n) $(4x - 5)^2 - 36 = 0$ oder $(4x - 5)^2 = 36 \Rightarrow 4x - 5 = \pm 6$, d.h. $x_1 = -0{,}25\ ;\ x_2 = 2{,}75$

o) $(3y + 3)^2 = 64 \Rightarrow 3y + 3 = \pm 8$, d.h. $y_1 = -11/3 \approx -3{,}67$; $y_2 = 5/3 \approx 1{,}67$

p) $(8z - 64)^2 = 144 \Rightarrow 8z - 64 = \pm 12$, d.h. $z_1 = 6{,}5\ ;\ z_2 = 9{,}5$

3.28 **a)**
$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$x^2 + 2\cdot 1\cdot x + 1 - 1 - 3 = 0$$
$$x^2 + 2x + 1 - 4 = 0$$
$$(x+1)^2 = 4$$
$$x + 1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1$$
$$x + 1 = -2 \Rightarrow x_x = -3$$
$$L = \{1; -3\}$$

b)
$$a^2 - 2a - 8 = 0$$
$$a^2 - 2a + 1 - 1 - 8 = 0$$
$$a^2 - 2a + 1 - 9 = 0$$
$$(a - 1)^2 = 9$$
$$a - 1 = 3 \Rightarrow a_1 = 4$$
$$a - 1 = -3 \Rightarrow a_1 = -2$$
$$L = \{4, -2\}$$

c)
$$a^2 + 2a - \frac{5}{4} = 0$$
$$a^2 + 2a + 1 - 1 - \frac{5}{4} = 0$$
$$(a+1)^2 = \frac{9}{4}$$
$$a + 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}$$
$$a + 1 = -\frac{3}{2} \Rightarrow a_1 = -\frac{5}{2}$$
$$L = \left\{\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right\}$$

d)
$$2d^2 - 6a - 8 = 0$$
$$d^2 - 3d - 4 = 0$$
$$d^2 - \frac{3}{2}d + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$$
$$\left(d - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$
$$d - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow d_1 = 4$$
$$d - \frac{3}{2} = -\frac{5}{2} \Rightarrow d_2 = -1$$
$$L = \{4; -1\}$$

e)
$$4s^2 - 4s - 8 = 0$$
$$s^2 - s - 2 = 0$$
$$s^2 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot s + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 2 = 0$$
$$\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$
$$s - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow s_1 = 2$$
$$s - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow s_2 = -1$$
$$L = \{2; -1\}$$

f)
$$3h^2 - 6h = 9;\quad h^2 - 2h = 3$$
$$h^2 - 2h + 1 - 1 = 3$$
$$(h - 1)^2 = 4$$
$$h - 1 = 2 \Rightarrow h_1 = 3$$
$$h - 1 = -2 \Rightarrow h_2 = -1$$
$$L = \{3; -1\}$$

g)
$$4r^2 + 12r = -5$$
$$r^2 + 3r = -\frac{5}{4}$$
$$r^2 + 2\cdot\frac{3}{2}\cdot r + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} = -\frac{5}{4}$$
$$\left(r + \frac{3}{2}\right)^2 = 1$$
$$r + \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow r_1 = -\frac{1}{2}$$
$$r + \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow r_2 = -\frac{5}{2}$$
$$L = \left\{-\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right\}$$

h)
$$2y^2 + 4y = \frac{5}{2}$$
$$y^2 + 2y = \frac{5}{4}$$
$$y^2 + 2y + 1 - 1 = \frac{5}{4}$$
$$(y+1)^2 = \frac{9}{4}$$
$$y + 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{1}{2}$$
$$y + 1 = -\frac{3}{2} \Rightarrow y_2 = -\frac{5}{2}$$
$$L = \left\{\frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right\}$$

i)
$$12x^2 + 12x = 9$$
$$x^2 + x = \frac{3}{4}$$
$$x^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$
$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 1$$
$$x + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$$
$$x + \frac{1}{2} = -1 \Rightarrow x_2 = -\frac{3}{2}$$
$$L = \left\{\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right\}$$

3.28 **j)** $5x^2+4x-12=0$

$x^2+\frac{4}{5}x=\frac{12}{5}$

$x^2+2\cdot\frac{2}{5}\cdot x+\frac{4}{25}-\frac{4}{25}=\frac{12}{5}$

$\left(x+\frac{2}{5}\right)^2=\frac{64}{25}$

$x+\frac{2}{5}=\frac{8}{5} \Rightarrow x_1=\frac{6}{5}$

$x+\frac{2}{5}=-\frac{8}{5} \Rightarrow x_2=-2$

$L=\left\{\frac{6}{5};-2\right\}$

k) $4y-8y^2+\frac{15}{2}=0$

$y^2-\frac{y}{2}=\frac{15}{16}$

$y^2-2\cdot\frac{1}{4}\cdot y+\frac{1}{16}-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

$\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=1$

$y-\frac{1}{4}=1 \Rightarrow y_1=\frac{5}{4}$

$y-\frac{1}{4}=-1 \Rightarrow y_2=-\frac{3}{4}$

$L=\left\{\frac{5}{4};-\frac{3}{4}\right\}$

l) $2x^2=4x+\frac{5}{2}$

$x^2-2x=\frac{5}{4}$

$x^2-2x+1-1=\frac{5}{4}$

$(x-1)^2=\frac{9}{4}$

$x-1=\frac{3}{2} \Rightarrow x_1=\frac{5}{2}$

$x-1=-\frac{3}{2} \Rightarrow x_2=-\frac{1}{2}$

$L=\left\{\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right\}$

3.29 $a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$; Diskriminante $D = b^2-4ac$

a) $x^2 - 10x + 5 = 0$; $D = (-100)^2 - 4\cdot1\cdot5 > 0 \Rightarrow$ 2 verschiedene Lösungen

b) $x^2 + 10x = -15$; $x^2 + 10x + 15 = 0$; $D = 100^2 - 4\cdot1\cdot(-15) > 0 \Rightarrow$ 2 verschiedene Lösungen

c) $w^2 + 4w = 0$; $D = 4^2 - 4\cdot1\cdot0 > 0 \Rightarrow$ 2 verschiedene Lösungen

d) $3w^2 + 3w + 3 = 0$; $D = 3^2 - 4\cdot3\cdot3 < 0 \Rightarrow$ keine (reelle) Lösung

e) $3y^2-10y+\frac{25}{3}=0$; $D=(-10)^2-4\cdot3\cdot\frac{25}{3}=0 \Rightarrow$ eine Lösung (Doppellösung)

f) $\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y+\frac{25}{4}=0$; $D=\left(\frac{1}{3}\right)^2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{4}<0 \Rightarrow$ keine (reelle) Lösung

g) $s^2-12s-\frac{24}{5}=\frac{56}{6}$; $s^2-12s-\frac{212}{15}=0$; $D=(-12)^2-4\cdot1\cdot\frac{-112}{15}>0 \Rightarrow$ 2 verschiedene Lösungen

h) $\frac{45}{8}a^2-15a+10=0$; $D=(-15)^2-4\cdot\frac{45}{8}\cdot10=0 \Rightarrow$ eine Lösung (Doppellösung)

3.30 **a)** $6 - 2w^2 = 8 - 4w^2$; $2w^2 = 2$; $w^2 = 1$; $w_1 = 1$, $w_2 = -1$

b) $16x^2 = 64$; $x^2 = 4$ $x_1 = 2$, $x_2 = -2$

c) $36 = 49\cdot u^2$; $u^2 = \frac{36}{49}$; $u_1 = \frac{6}{7}$, $u_2 = -\frac{6}{7}$

d) $81 + 2c^2 = 4c^2$; $81 = 2c^2$; $c^2 = \frac{81}{2}$; $c_1 = \frac{9}{\sqrt{2}} = \frac{9\cdot\sqrt{2}}{2}$, $c_2 = -\frac{9}{\sqrt{2}} = -\frac{9\cdot\sqrt{2}}{2}$

3.31 **a)** $10\cdot y^2 - 7y - 45 = 0$; $a = 10$, $b = -7$, $c = 45$;

$$y_{12}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot10\cdot(-45)}}{2\cdot10}=\frac{7\pm\sqrt{49+4\cdot10\cdot1800}}{20}=\frac{7\pm43}{20};\ y_1=\frac{5}{2};\ y_2=-\frac{9}{5}$$

b) $3\cdot z^2-11z+6=0$; $a = 3$; $b = -11$; $c = 6$;

$$z_{12}=\frac{-(-11)\pm\sqrt{(-11)^2-4\cdot3\cdot6}}{2\cdot3}=\frac{11\pm\sqrt{49}}{6}=\frac{11\pm7}{6};\ z_1=3;\ z_2=\frac{2}{3}$$

c) $x^2 - 5x + 6 = 0$; Normalform: $p = -5$; $q = 6$;

$$x_{12}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}=-\frac{-5}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2-6}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-\frac{24}{4}}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{5}{2}\pm\frac{1}{2};\ x_1=3;\ x_2=2$$

d) $u^2 - 6u - 40 = 0$; Normalform: $p = -6$, $q = -40$;

$$u_{12}=-\frac{-6}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2-(-40)}=3\pm\sqrt{\frac{36}{4}+\frac{160}{4}}=3\pm\sqrt{\frac{196}{4}}=3\pm\frac{14}{2}=3\pm7;\ u_1=10;\ u_2=-4$$

e) $2u^2 - 3u + 1 = 0$; $a = 2$; $b = -3$; $c = 1$; $u_{12}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot2\cdot1}}{2\cdot2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{4}=\frac{3\pm1}{4};\ u_1=1;\ u_2=\frac{1}{2}$

f) $s^2 - 17s + 16 = 0$; Normalform: $p = -17$, $q = 16$;

$$s_{12}=-\frac{-17}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-17}{2}\right)^2-16}=\frac{17}{2}\pm\sqrt{\frac{289}{4}-\frac{64}{4}}=\frac{17}{2}\pm\sqrt{\frac{225}{4}}=\frac{17}{2}\pm\frac{15}{2};\ s_1=16;\ s_2=1$$

3.31 **g)** $x^2 - 20x + 100 = 0$; Normalform: $p = -20$, $q = 100$;

$x_{12} = -\frac{-20}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-20}{2}\right)^2 - 100} = 10$; $x_1 = x_2 = 10$

h) $9x^2 - 24x + 16 = 0$; $a = 9$, $b = -24$, $c = 16$; $x_{12} = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 16}}{2 \cdot 9} = \frac{24}{18}$; $x_1 = x_2 = \frac{4}{3}$

3.32 **a)** $4x^2 - \frac{x}{3} = 0$; $12x^2 - x = 0$; $x \cdot (12x - 1) = 0$;

Produkt-Null-Satz $\Rightarrow$ $x = 0$ oder $12x - 1 = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{1}{12}$

b) $18 \cdot (x - 2)^2 = 2$; $(x - 2)^2 = \frac{1}{9}$; $x - 2 = \pm\frac{1}{3}$; $x_1 = \frac{7}{3}$, $x_2 = \frac{5}{3}$

c) $(x+3) \cdot (x-4) = 0$; Produkt-Null-Satz $\Rightarrow$ $x+3 = 0$ oder $x - 4 = 0$; $x_1 = -3$, $x_2 = 4$

d) $\frac{5}{2}x + x^2 = 0$; $x \cdot \left(\frac{5}{2} + x\right) = 0$; Produkt-Null-Satz $\Rightarrow$ $x = 0$ oder $\frac{5}{2} + x = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{5}{2}$

e) $\left(2x - \frac{1}{3}\right) \cdot (x + 1) = 0$; Produkt-Null-Satz $\Rightarrow$ $2x - \frac{1}{3} = 0$ oder $x + 1 = 0$; $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = -1$

f) $10x^2 = -40x - 40$; $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 = 0$; $x + 2 = 0$; $x_1 = x_2 = -2$

3.33 **a)** $\frac{w}{4} + 1 = \frac{w-2}{5-w}$; $w \neq 5$

$5w - w^2 + 20 - 4w = 4w - 8$

$w^2 + 3w - 28 = 0$

$w_{12} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 28}$

$w_1 = 4$, $w_2 = -7$

b) $\frac{4}{\frac{9}{r} - 1} = 2 \cdot (4 - r)$; $r \neq 9$

$2 = \left(\frac{9}{r} - 1\right) \cdot (4 - r)$

$2 = \frac{36}{r} - 13 + r$

$2r = 36 - 13r + r^2$

$r^2 - 15r + 36 = 0$

$r_{12} = \frac{15}{2} \pm \sqrt{\frac{225}{4} - 36}$

$r_1 = 3$, $r_2 = 12$

c) $\frac{a}{40} + \frac{a+4}{4-a} = a$; $a \neq 4$

$a \cdot (4 - a) + 40 \cdot (a + 4) =$

$= 40a \cdot (4 - a)$

$39a^2 - 116a + 160 = 0$

$a_{12} = \frac{116 \pm \sqrt{13456 - 24960}}{78}$

Radikand (Term unter der Wurzel) negativ $\Rightarrow$ keine (reellen) Lösungen

d) $\frac{x}{x+3} - \frac{9}{4} - \frac{x}{3-x} = 0$; $x \neq -3$; $x \neq +3$

$12x - 4x^2 - 9 \cdot (9 - x^2) - 12x - 4x^2 = 0$

$x^2 = 81$

$x_1 = 9$, $x_2 = -9$

e) $1 - \frac{6t-20}{2 \cdot (t-2)} - \frac{t-4}{t+1} = 0$; $t \neq -1$; $t \neq +2$

$(t - 2)(t + 1) - (3t - 10)(t + 1) - (t - 4)(t - 2) = 0$

$t^2 - t - 2 - 3t^2 + 7t + 10 - t^2 + 6t - 8 = 0$

$-3t^2 + 12t = 0$

$3t \cdot (-t + 4) = 0$

Produkt-Null-Satz $\Rightarrow$ $t_1 = 0$, $t_2 = 4$

f) $\frac{c+5}{c+1} + \frac{8}{2c-2} = \frac{17-3c}{c-1}$; $c \neq -1$; $c \neq +1$

$\frac{c+5}{c+1} + \frac{4}{c-1} = \frac{17-3c}{c-1}$; $\frac{(c+5)(c-1)+4(c+1)}{(c+1)(c-1)} = \frac{17-3c}{c-1}$

$(c + 5)(c - 1) + 4(c + 1) = (17 - 3c)(c + 1)$; $c^2 - c + 5c - 5 + 4c + 4 = 17c - 3c^2 + 17 - 3c$

$4c^2 - 6c - 18 = 0 \rightarrow 2c^2 - 3c - 9 = 0$; $c_{12} = \frac{3 \pm \sqrt{9+72}}{4} = \frac{3 \pm 9}{4}$; $c_1 = 3$, $c_2 = -\frac{3}{2}$

3.33 g) $\frac{y+16}{y+1}=\frac{3y-2}{5-2y}+\frac{5y-2}{2y}$; $\quad y\neq 0\,;y\neq -1\,;y\neq \frac{5}{2}$

$(y+16)(5-2y)\cdot 2y=(3y-2)(y+1)\cdot 2y+(5y-2)(y+1)(5-2y)$

$-4y^3-54y^2+160y=6y^3+2y^2-4y-10y^3+19y^2+19y-10$

$75y^2-145y-10=0\ ;\quad 15y^2-29y-2=0;\quad y_{12}=\frac{29\pm\sqrt{841+120}}{30}=\frac{29\pm 31}{30};\quad y_1=2,\ y_2=-\frac{1}{15}$

h) $\frac{4u-8}{u-2}+5\cdot(u-1)=0\ ;\quad u\neq 2$

$4u-8+5\cdot(u-1)(u-2)=0$

$4u-8+5\cdot(u^2-3u+2)=0$

$5u^2-11u+2=0$

$u_{12}=\frac{11\pm\sqrt{121-40}}{10}=\frac{11\pm 9}{10}$

$u_1=\frac{1}{5}$; $u_2=2$ ist dagegen keine Lösung, da nicht im Definitionsbereich!

i) $3(x-1)+\frac{x-4}{x-3}=\frac{1}{3-x}\ ;\quad x\neq 3$

$3(x-1)+\frac{x-4}{x-3}+\frac{1}{x-3}=0$

$3(x-1)(x-3)+x-4+1=0$

$3x^2-11x+6=0$

$x_{12}=\frac{11\pm\sqrt{121-72}}{6}=\frac{11\pm 7}{6}$

$x_1=\frac{2}{3}$; $x_2=3$ ist dagegen keine Lösung, da nicht im Definitionsbereich

3.34 a) $\frac{4x-5}{7}=x+\frac{3}{x}-\frac{4x-2}{10}-2\ ;\quad x\neq 0$

$10x\cdot(4x-5)=$

$\quad =70x^2+210-7x\cdot(4x-2)-140x$

$x^2-38x+105=0$

$x_{12}=19\pm\sqrt{19^2-105}=19\pm 16$

$x_1=3,\ x_2=35$

b) $\frac{-(3a-4)}{a+1}-\frac{3\cdot(a+1)}{(a-1)\cdot(a+1)}=-\frac{2a+1}{a-1}\ |\cdot(a-1)\cdot(a+1)$

$a\neq 1\,;a\neq -1$

$-(a-1)(3a-4)-3\cdot(a+1)=-(a+1)\cdot(2a+1)$

$a^2-7a+6=0$

$(a-1)(a-6)=0$

Produkt-Null-Satz $\Rightarrow$

$a_1=6$; $a_2=1$ ist dagegen keine Lösung, da nicht im Definitionsbereich

c) $\frac{16}{y^2-16}-2=\frac{8}{y-4}-1\ |\cdot(y^2-16);y\neq 4\,;y\neq -4$

$16-2\cdot(y^2-16)=8\cdot(y+4)-(y^2-16);\quad y^2+8y=0;\quad y\cdot(y+8)=0$

Produkt-Null-Satz $\Rightarrow y_1=0,\ y_2=-8$

d) $\frac{2x-1}{x+3}=\frac{1-x}{x}+\frac{6x-12}{2\cdot(x-1)};\quad x\neq -3\ ;\ x\neq 0\,;x\neq 1$

$\frac{2x-1}{x+3}=-\frac{x-1}{x}+\frac{3x-6}{x-1}\quad |\,x\cdot(x+3)(x-1)$

$x\cdot(x-1)(2x-1)=-(x+3)(x-1)^2+x\cdot(x+3)(3x-6);\quad 5x^2-14x-3=0$

$x_{12}=\frac{-(-14)\pm\sqrt{(-14)^2-4\cdot 5\cdot(-3)}}{2\cdot 5}=\frac{14\pm 16}{10};\quad x_1=3;\quad x_2=-\frac{1}{5}$

e) $\frac{2}{y^2-4}-\frac{1}{y\cdot(y-2)}=\frac{y^2-4}{y^2+2y};\quad y\neq 0\,;y\neq -2\,;y\neq +2$

$\frac{2}{y^2-4}-\frac{1}{y\cdot(y-2)}=\frac{(y-2)(y+2)}{y\cdot(y+2)};\quad \frac{2}{y^2-4}-\frac{1}{y\cdot(y-2)}=\frac{y-2}{y}\ |\cdot y\cdot(y^2-4)$

$2y-(y+2)=(y^2-4)\cdot(y-2);\quad y^3-2y^2=5y+10;\quad y^2\cdot(y-2)=5\cdot(y-2)$

$y^2\cdot(y-2)-5\cdot(y-2)=0;\quad (y-2)\cdot(y^2-5)=0$

Produkt-Null-Satz: $y^2-5=0$ oder $y-2=0$; d.h. $y_1=\sqrt{5}$, $y_2=-\sqrt{5}$;

$y_3=2$ ist dagegen keine Lösung, da nicht im Definitionsbereich

3.34 **f)** $-\frac{2k+7}{k+2}+\frac{3\cdot(k-1)}{k-2}=\frac{17}{k^2-4}\,|\cdot(k-2)(k+2);\quad k\neq-2\,;k\neq+2$

$-(2k+7)(k-2)+3\cdot(k-1)(k+2)=17;\quad -(2k^2+3k-14)+3\cdot(k^2+k-2)=17$

$k^2=9;\quad k_1=3,\ k_2=-3$

g) $\frac{4}{6}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{100}=0{,}75\cdot\left(2x+\frac{3}{5}\right)^2\,|\cdot 300$

$200\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-9=225\cdot\left(2x+\frac{3}{5}\right)^2;\quad 200\cdot\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-9=225\cdot\left(4x^2+\frac{12}{5}x+\frac{9}{25}\right)$

$35x^2+37x+2=0;\ x_{12}=\frac{-37\pm\sqrt{37^2-4\cdot35\cdot2}}{2\cdot35}=\frac{-37\pm33}{70};\ x_1=-1,\ x_2=-\frac{2}{35}$

h) $\frac{2w+1}{w-1}-\frac{3w^2-6}{w+1}-\frac{3\cdot(w+1)}{w^2-1}=0;\quad w\neq-1\,;w\neq+1$

$\frac{2w+1}{w-1}-\frac{3w^2-6}{w+1}-\frac{3\cdot(w+1)}{(w-1)(w+1)}=0;\quad \frac{2w+1}{w-1}-\frac{3w^2-6}{w+1}-\frac{3}{w-1}=0;\quad \frac{2w+1}{w-1}-\frac{3}{w-1}-\frac{3w^2-6}{w+1}=0;$

$\frac{2w-2}{w-1}=\frac{3w^2-6}{w+1};\quad \frac{2\cdot(w-1)}{w-1}=\frac{3w^2-6}{w+1};\quad 2=\frac{3w^2-6}{w+1};\quad 2w+2=3w^2-6;\quad 3w^2-2w-8=0$

$w_{12}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot3\cdot(-8)}}{2\cdot3}=\frac{2\pm10}{6};\quad w_1=2;\ w_2=-\frac{4}{3}$

3.35 **a)** $(x-a)^2=0$

$(x-a)\cdot(x-a)=0$

$x_1=x_2=a$

b) $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=1$

$x-\frac{a}{2}=\pm1$

$x_1=\frac{a}{2}+1,\ x_2=\frac{a}{2}-1$

c) $(x-a)\cdot\left(x-\frac{1}{2a}\right)=0$

Produkt-Null-Satz $\Rightarrow$

$x_1=a,\ x_2=\frac{1}{2a}$

d) $x^2+4mx+4m^2=0$

$(x+2m)^2=0$

$(x+2m)\cdot(x+2m)=0$

$x_1=x_2=-2m$

Lösung auch mit der Lösungsformel

e) $x^2+x=d^2+d$

$x^2+x-(d^2+d)=0$

$x_{12}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+d^2+d}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1+4d^2+4d}{4}}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{4d^2+4d+1}{4}}=$

$=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{(2d+1)^2}{4}}=\frac{-1\pm(2d+1)}{2};\ x_1=d,\ x_2=-d-1$

f) $x^2-\frac{x}{k}+1=k\cdot x\,|\cdot k;\quad k\cdot x^2-x+k=k^2\cdot x;\quad k\cdot x^2-(k^2+1)\cdot x+k=0$

$x_{12}=\frac{k^2+1\pm\sqrt{(k^2+1)^2-4\cdot k\cdot k}}{2k}=\frac{k^2+1\pm\sqrt{k^4+2k^2+1-4k^2}}{2k}=\frac{k^2+1\pm\sqrt{k^4-2k^2+1}}{2k}=\frac{k^2+1\pm\sqrt{(k^2-1)^2}}{2k}=$

$=\frac{k^2+1\pm(k^2-1)}{2k};\ x_1=k,\ x_2=\frac{1}{k}$

g) $3x^2-5ax-2a^2=0;\ x_{12}=\frac{-(-5a)\pm\sqrt{(-5a)^2-4\cdot3\cdot(-2a^2)}}{2\cdot3}=\frac{5a\pm\sqrt{49a^2}}{6}=\frac{5a\pm7a}{6};\ x_1=2a,\ x_2=-\frac{a}{3}$

h) $2x^2-3ax+a^2=0;\ x_{12}=\frac{-(-3a)\pm\sqrt{(-3a)^2-4\cdot2\cdot a^2}}{2\cdot2}=\frac{3a\pm\sqrt{a^2}}{4}=\frac{3a\pm a}{4};\ x_1=a,\ x_2=\frac{a}{2}$

i) $2x^2+b\cdot x+2x=b^2+b;\ 2x^2+(b+2)\cdot x-(b^2+b)=0;$

$x_{12}=\frac{-(b+2)\pm\sqrt{(b+2)^2-4\cdot2\cdot(-b^2-b)}}{2\cdot2}=\frac{-(b+2)\pm\sqrt{b^2+4b+4+8b^2+8b}}{4}=\frac{-(b+2)\pm\sqrt{9b^2+12b+4}}{4}=$

$=\frac{-(b+2)\pm\sqrt{(3b+2)^2}}{4}=\frac{-(b+2)\pm(3b+2)}{4};\ x_1=\frac{b}{2},\ x_2=-b-1$

3.35 **j)** $4x^2+1=2x\cdot\left(u+\frac{1}{u}\right);\;\; 4x^2-2x\cdot\left(u+\frac{1}{u}\right)+1=0;$

$$x_{12}=\frac{2\cdot\left(u+\frac{1}{u}\right)\pm\sqrt{4\cdot\left(u+\frac{1}{u}\right)^2-4\cdot4\cdot1}}{2\cdot8}=\frac{2\cdot\left(u+\frac{1}{u}\right)\pm\sqrt{4\cdot\left(u+\frac{1}{u}\right)^2-4\cdot4\cdot1}}{16}=\frac{2\cdot\left(u+\frac{1}{u}\right)\pm\sqrt{\frac{4\cdot(u^4-2u^2+1)}{u^2}}}{16}=$$

$$=\frac{2\cdot\frac{u^2+1}{u}\pm\sqrt{\frac{4\cdot(u^2-1)^2}{u^2}}}{8}=\frac{2\cdot\frac{u^2+1}{u}\pm\frac{2(u^2-1)}{u}}{8}=\frac{u^2+1\pm(u^2-1)}{4u};\quad x_1=\frac{u}{2},\;x_2=\frac{1}{2u}$$

k) $x-3s=1-\frac{2s\cdot(s+1)}{x};\; x\neq0;\quad x^2-(3s+1)\cdot x+2s\cdot(s+1)=0;$

$$x_{12}=\frac{3s+1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{3s+1}{2}\right)^2-2s\cdot(s+1)}=\frac{3s+1}{2}\pm\sqrt{\frac{s^2-2s+1}{4}}=\frac{3s+1}{2}\pm\frac{s-1}{2}=\frac{3s+1\pm(s-1)}{2};$$

$x_1=2s,\; x_2=s+1$

l) $x\cdot(x-2)=b\cdot\left(\frac{x}{2}-1\right);\quad x^2-\frac{4+b}{2}\cdot x+b=0$

$$x_{12}=\frac{4+b}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{4+b}{4}\right)^2-b}=\frac{4+b}{4}\pm\sqrt{\frac{16+8b+b^2-16b}{16}}=\frac{4+b}{4}\pm\sqrt{\frac{b^2-8b+16}{16}}=$$

$$=\frac{4+b}{4}\pm\sqrt{\frac{(b-4)^2}{16}}=\frac{4+b\pm(b-4)}{4};\quad x_1=\frac{b}{2},\;x_2=2$$

3.36 **a)** $x+\frac{2}{x}=\frac{1+2a^2}{a};\; x\neq0;\quad x^2-\frac{1+2a^2}{a}\cdot x+2=0$

$$x_{12}=\frac{1+2a^2}{2a}\pm\sqrt{\left(\frac{1+2a^2}{2a}\right)^2-2}=\frac{1+2a^2}{2a}\pm\sqrt{\frac{1+4a^2+4a^4}{4a^2}-2}=\frac{1+2a^2}{2a}\pm\sqrt{\frac{1-4a^2+4a^4}{4a^2}}=$$

$$=\frac{1+2a^2}{2a}\pm\sqrt{\frac{(1-2a^2)^2}{4a^2}}=\frac{1+2a^2\pm(1-2a^2)}{2a};\quad x_1=\frac{1}{a},\;x_2=2a$$

b) $\frac{p}{x}+pq\cdot x=p^2+q;\quad pq\cdot x^2-(p^2+q)\cdot x+p=0$

$$x_{12}=\frac{p^2+q\pm\sqrt{(p^2+q)^2-4\cdot pq\cdot p}}{2\cdot pq}=\frac{p^2+q\pm\sqrt{p^4+2p^2q+q^2-4\cdot p^2q}}{2\cdot pq}=\frac{p^2+q\pm\sqrt{p^4-2p^2q+q^2}}{2\cdot pq}=$$

$$=\frac{p^2+q\pm\sqrt{(p^2-q)^2}}{2\cdot pq}=\frac{p^2+q\pm(p^2-q)}{2\cdot pq};\quad x_1=\frac{p}{q},\;x_2=\frac{1}{p}$$

c) $x-\frac{a^2b+1}{ab}+\frac{1}{b\cdot x}=0\,|\cdot abx;\; x\neq0;\quad ab\cdot x^2-x\cdot(a^2b+1)+a=0$

$$x_{12}=\frac{a^2b+1\pm\sqrt{(a^2b+1)^2-4\cdot ab\cdot a}}{2\cdot ab}=\frac{a^2b+1\pm\sqrt{a^4b^2+2a^2b+1-4\cdot a^2b}}{2\cdot ab}=\frac{a^2b+1\pm\sqrt{a^4b^2-2a^2b+1}}{2\cdot ab}=$$

$$=\frac{a^2b+1\pm\sqrt{a^4b^2-2a^2b+1}}{2\cdot ab}=\frac{a^2b+1\pm\sqrt{(a^2b-1)^2}}{2\cdot ab}=\frac{a^2b+1\pm(a^2b-1)}{2\cdot ab};\quad x_1=a,\;x_2=\frac{1}{ab}$$

d) $\frac{a}{x+1}+x-a=0\,|\cdot(x+1),\; x\neq-1;\quad x^2+x\cdot(1-a)=0;\; x\cdot(x+1-a)=0;$

Produkt-Null-Satz $\Rightarrow x_1=0,\; x_2=a-1$

3.36 **e)** $\frac{a}{2x}-\frac{a-2}{x-1}+1=0\,|\cdot 2x\cdot(x-1)$, $x\neq 0, x\neq 1$; $2x^2-(a-2)\cdot x-a=0$

$$x_{12}=\frac{a-2\pm\sqrt{(a-2)^2-4\cdot 2\cdot(-a)}}{2\cdot 2}=\frac{a-2\pm\sqrt{a^2-4a+4+8a}}{4}=\frac{a-2\pm\sqrt{a^2+4a+4}}{4}=\frac{a-2\pm\sqrt{(a+2)^2}}{4}=$$

$$=\frac{a-2\pm(a+2)}{4};\quad x_1=\frac{a}{2},\ x_2=-1$$

f) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-a}=\frac{1-a}{a}\,|\cdot a\cdot(x-1)\cdot(x-a)$, $x\neq 1, x\neq a$; $(1-a)\cdot x^2+(a^2-1)\cdot x=0$

$(1-a)\cdot x^2+(a-1)\cdot(a+1)\cdot x=0\,|:(a-1)$ für $a\neq 1$

$-x^2+(a+1)\cdot x=0$; $x\cdot(-x+a+1)=0$; Produkt-Null-Satz $\Rightarrow$ $x_1=0$, $x_2=a+1$

Anmerkung: Ist $a=1$, so vereinfacht sich die Gleichung zu $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-1}=0$; diese Gleichung wird von allen $x\neq 1$ gelöst.

g) $\frac{1-kx}{k-x}=\frac{k-x}{1-kx}\,|\cdot(k-x)\cdot(1-kx)$, $x\neq k, x\neq\frac{1}{k}$;

$(k^2-1)\cdot x^2=k^2-1\,|(k^2-1)$, möglich, da $k^2\neq 1$ vorausgesetzt $\Rightarrow$ $x^2=1$, d.h. $x_1=1$, $x_2=-1$

h) $3\cdot\frac{x-m}{x+m}=4-\frac{x+m}{m-x}\,|\cdot(x+m)\cdot m-x)$, $x\neq m, x\neq -m$; $x^2+4m\cdot x-3m^2=0$;

$x_{12}=-2m\pm\sqrt{4m^2+3m^2}=-2m\pm m\sqrt{7}$; $x_1=m\cdot(\sqrt{7}-2)$, $x_2=-m\cdot(\sqrt{7}+2)$

i) $x-\frac{1}{x}=\frac{2m+n}{2m-n}-\frac{2m-n}{2m+n}$, $x\neq 0$; man kann abkürzend $a=\frac{2m+n}{2m-n}$ setzen (substituieren) und erhält dann: $x-\frac{1}{x}=a-\frac{1}{a}\,|\cdot a\cdot x$; $a\cdot x^2-(a^2-1)\cdot x-a=0$

$$x_{12}=\frac{a^2-1\pm\sqrt{(a^2-1)^2-4\cdot a\cdot(-a)}}{2a}=\frac{a^2-1\pm\sqrt{a^4-2a^2+1+4\cdot a^2}}{2a}=\frac{a^2-1\pm\sqrt{a^4+2a^2+1}}{2a}=$$

$$=\frac{a^2-1\pm\sqrt{(a^2+1)^2}}{2a}=\frac{a^2-1\pm(a^2+1)}{2a};\quad x_1=a=\frac{2m+n}{2m-n},\ x_2=-\frac{1}{a}=-\frac{2m-n}{2m+n}$$

3.37 **a)** $s=v\cdot t+\frac{a}{2}\cdot t^2\,|\cdot 2$

$2s=2\cdot v\cdot t+a\cdot t^2$; $a\cdot t^2+2\cdot v\cdot t-2s=0$

$$t_{12}=\frac{-2v\pm\sqrt{4v^2-4\cdot a\cdot(-2s)}}{2a}=\frac{-2v\pm\sqrt{4v^2+8\cdot a\cdot s}}{2a}=$$

$$=\frac{-2v\pm 2\sqrt{v^2+2\cdot a\cdot s}}{2a}=\frac{-v\pm\sqrt{v^2+2\cdot a\cdot s}}{a}$$

b) $M=\frac{p}{2\cdot l}\cdot x\cdot(l-x)\,|\cdot 2l$

$2M\cdot l=p\cdot l\cdot x-p\cdot x^2$; $p\cdot x^2-p\cdot l\cdot x+2M\cdot l=0$

$$x_{12}=\frac{-p\cdot l\pm\sqrt{p^2l^2-4\cdot p\cdot 2Ml}}{2p}=$$

$$=\frac{-p\cdot l\pm\sqrt{p^2l^2-8\cdot pMl}}{2p}$$

c) $\lambda^2+\frac{R}{L}\cdot\lambda+\frac{1}{L\cdot C}=0$; $\lambda_{12}=-\frac{R}{2\cdot L}\pm\sqrt{\frac{R^2}{4\cdot L^2}-\frac{1}{L\cdot C}}=\frac{-R\cdot C\pm\sqrt{R^2\cdot C^2-4\cdot L\cdot C}}{2\cdot L\cdot C}$

3.38 **a)** $2x+3\cdot\sqrt{x}=14$, $D=[0,\infty[$

$3\cdot\sqrt{x}=14-2x$ |quadrieren

$9x=196-56x+4x^2$; $4x^2-65x+196=0$

$$x_{12}=\frac{65\pm\sqrt{4225-3136}}{8}=\frac{65\pm 33}{8}$$

$x_1=4$; Probe: $2\cdot 4+3\cdot\sqrt{16}=14$, stimmt!

$x_2=\frac{49}{4}$; Pr.: $2\cdot 4+3\cdot\sqrt{\frac{49}{4}}=14$, stimmt nicht!

$L=\{4\}$

b) $2\cdot\sqrt{x}=8+x$, $D=[0,\infty[$

$4x=64+16x+x^2$

$x^2+12x+64=0$

$x_{12}=-6\pm\sqrt{36-64}=-6\pm\sqrt{-28}$

keine (reelle) Lösung: $L=\{\}$

3.38 **c)** $2\cdot\sqrt{x+5}=x+3,\quad D=[-5,\infty[$

$4\cdot(x+5)=x^2+6x+9$

$x^2+2x-11=0$

$x_{12}=-1\pm\sqrt{1+11}=-1\pm 2\cdot\sqrt{3}$

$x_1=-1+2\cdot\sqrt{3}=2{,}464;$

Probe: $2\cdot\sqrt{-1+2\cdot\sqrt{3}+5}=-1+2\cdot\sqrt{3}+3$ stimmt!

$x_2=-1-2\cdot\sqrt{3}=-4{,}464;$

Pr.: $2\cdot\sqrt{-1-2\cdot\sqrt{3}+5}=-1-2\cdot\sqrt{3}+3$ stimmt nicht! $L=\{-1+2\cdot\sqrt{3}\}=\{2{,}464\}$

d) $x=6+\sqrt{x},\quad D=[0,\infty[$

$x-6=\sqrt{x}$

$x^2-12x+36=x;\quad x^2-13x+36=0$

$x_{12}=6{,}5\pm\sqrt{42{,}25-36}=6{,}5\pm 2{,}5$

$x_1=9;$ Probe: $9=6+\sqrt{9}$, stimmt!

$x_2=4;$ Pr.: $4=6+\sqrt{4}$, stimmt nicht!

$L=\{\ 9\ \}$

e) $2x-7=\sqrt{x+4},\quad D=[-4,\infty[$

$4x^2-28x+49=x+4;\ 4x^2-29x+45=0$

$x_{12}=\dfrac{29\pm\sqrt{841-720}}{8}=\dfrac{29\pm 11}{8}$

$x_1=5;$ Probe: $2\cdot 5-7=\sqrt{5+4}$, stimmt!

$x_2=\frac{9}{4};$ Pr.: $2\cdot\frac{9}{4}-7=\sqrt{\frac{9}{4}+4}$, stimmt nicht!

$L=\{\ 5\ \}$

f) $2x+7=\sqrt{x+4},\ D=[-4,\infty[$

$4x^2+28x+49=x+4;\ 4x^2+27x+45=0$

$x_{12}=\dfrac{-27\pm\sqrt{729-720}}{8}=\dfrac{-27\pm 3}{8}$

$x_1=-3;$

Probe: $2\cdot(-3)+7=\sqrt{-3+4}$, stimmt!

$x_2=-\frac{15}{4};$

Pr.: $2\cdot\left(-\frac{15}{4}\right)+7=\sqrt{-\frac{15}{4}+4}$, stimmt nicht! $L=\{\ -3\ \}$

g) $\sqrt{2x-5}+3=\sqrt{5x+1},\quad D=[2{,}5;\infty[$

$2x-5+6\cdot\sqrt{2x-5}+9=5x+1$

$6\cdot\sqrt{2x-5}=3x-3;\qquad 2\cdot\sqrt{2x-5}=x-1$

$4\cdot(2x-5)=x^2-2x+1$

$x^2-10x+21=0$

$x_{12}=5\pm\sqrt{25-21}=5\pm 2$

$x_1=7;\ \sqrt{2\cdot 7-5}+3=\sqrt{5\cdot 7+1}$, stimmt!

$x_2=3;\ \sqrt{2\cdot 3-5}+3=\sqrt{5\cdot 3+1}$, stimmt!

$L=\{3,7\}$

h) $1+\sqrt{9x+1}=\sqrt{11x+4},\quad D=\left[-\frac{1}{9},\infty\right[$

$1+2\cdot\sqrt{9x+1}+9x+1=11x+4$

$\sqrt{9x+1}=x+1;\ 9x+1=x^2+2x+1$

$x^2-7x=0;\ x\cdot(x-7)=0$

Produkt–Null–Satz $\Rightarrow$ $x_1=0,\ x_2=7$

Probe: $1+\sqrt{9\cdot 0+1}=\sqrt{11\cdot 0+4}$, stimmt!

$1+\sqrt{9\cdot 7+1}=\sqrt{11\cdot 7+4}$, stimmt!

$L=\{0, 7\}$

i) $\sqrt{2\cdot(x-1)}+\sqrt{3x+1}=2;\quad D=[1,\infty[$

$\sqrt{2\cdot(x-1)}=2-\sqrt{3x+1}$

$2x-2=4-4\cdot\sqrt{3x+1}+3x+1$

$4\cdot\sqrt{3x+1}=x+7$

$16\cdot(3x+1)=x^2+14x+49;\ x^2-34x+33=0$

$x_{12}=17\pm\sqrt{289-33}=17\pm 16$

$x_1=33;$

Pr.: $\sqrt{2\cdot(33-1)}+\sqrt{3\cdot 33+1}=2$, stimmt nicht!

$x_2=1;$ Pr.: $\sqrt{2\cdot(1-1)}+\sqrt{3\cdot 1+1}=2$, stimmt!

$L=\{\ 1\ \}$

j) $2\cdot\sqrt{x}-\sqrt{x+3}=\sqrt{2x-2};\quad D=[1,\infty[$

$4x-4\cdot\sqrt{x\cdot(x+3)}+x+3=2x-2$

$4\cdot\sqrt{x\cdot(x+3)}=3x+5$

$16\cdot(x^2+3x)=9x^2+30x+25$

$7x^2+18x-25=0$

$x_{12}=\dfrac{-18\pm\sqrt{324+700}}{14}=\dfrac{-18\pm 32}{14}$

$x_1=1;$ Pr.: $2\cdot 1-\sqrt{1+3}=\sqrt{2\cdot 1-2}$, stimmt! $x_2=-\frac{25}{7}$ scheidet als Lösung aus, da nicht in D; $L=\{\ 1\ \}$

3.38 **k)** $2\cdot\sqrt{x}+\sqrt{x+3}=\sqrt{2x-2};\quad D=[1,\infty[$

$4x+4\cdot\sqrt{x\cdot(x+3)}+x+3=2x-2$

$4\cdot\sqrt{x\cdot(x+3)}=-3x-5$

$16\cdot(x^2+3x)=9x^2+30x+25$

$7x^2+18x-25=0$

$x_{12}=\frac{-18\pm\sqrt{324+700}}{14}=\frac{-18\pm 32}{14}$

$x_1=1$;

Probe: $2\cdot\sqrt{1}+\sqrt{1+3}=\sqrt{2\cdot 1-2}$, stimmt nicht! $x_2=-\frac{25}{7}$ scheidet als Lösung aus, da nicht in D; $L=\{\ \}$

l) $\sqrt{x+5}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x}=\sqrt{3x+4};\quad D=[0,\infty[$

$2\cdot\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=2\cdot\sqrt{3x+4}$

$4\cdot(x+5)+4\cdot\sqrt{(x+5)\cdot x}+x=4\cdot(3x+4)$

$4\cdot\sqrt{(x+5)\cdot x}=7x-4$

$16\cdot(x^2+5x)=49x^2-56x+16$

$33x^2-136x+16=0$

$x_{12}=\frac{136\pm\sqrt{18496-2112}}{66}=\frac{136\pm 128}{66}$

$x_1=4$;

Probe: $\sqrt{4+5}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4}=\sqrt{3\cdot 4+4}$, stimmt!

$x_2=\frac{4}{33}$; Pr.: $\sqrt{\frac{4}{33}+5}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{4}{33}}=\sqrt{3\cdot\frac{4}{33}+4}$

stimmt nicht! $L=\{\ 4\ \}$

3.39 **a)** $2\cdot\sqrt{x+5}-\sqrt{2x+1}=\sqrt{4x-3};\quad D=\left[\frac{3}{4},\infty\right[$

$4\cdot(x+5)-4\cdot\sqrt{(2x+1)(4x-3)}+2x+1=4x-3;\ -2x+22=4\cdot\sqrt{(2x+1)(4x-3)}$

$-x+11=2\cdot\sqrt{8x^2-2x-3};\ x^2-22x+121=8x^2-2x-3;\quad 7x^2+20x-124=0$

$x_{12}=\frac{-20\pm\sqrt{20^2+4\cdot 7\cdot 124}}{14}=\frac{-20\pm 44\cdot\sqrt{2}}{14};\ x_1=\frac{-10+22\cdot\sqrt{2}}{7}=3{,}016;\quad x_2=\frac{-10-22\cdot\sqrt{2}}{7}=-5{,}873$

Pr.: $2\sqrt{x_1+5}-\sqrt{2x_1+1}=\sqrt{4x_1-3}$ stimmt; $x_2=-\frac{25}{7}$ keine Lösung, da nicht in D; $L=\{3{,}016\}$

b) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3x-7}{2}}+\frac{1}{3}\cdot\sqrt{x+4}=\sqrt{x-1};\quad D=\left[\frac{7}{3},\infty\right[$

$3\cdot\sqrt{\frac{3x-7}{2}}=6\cdot\sqrt{x-1}-2\cdot\sqrt{x+4}\ ;\quad 9\cdot\frac{3x-7}{2}=36\cdot(x-1)-24\cdot\sqrt{(x-1)(x+4)}+4\cdot(x+4)$

$\frac{9}{2}\cdot(3x-7)=40x-20-24\cdot\sqrt{(x-1)(x+4)};\quad 27x-63=80x-40-48\cdot\sqrt{x^2+3x-4}$

$48\cdot\sqrt{x^2+3x-4}=53x+23;\ \ 2304\cdot(x^2+3x-4)=2809x^2+2438x+529$

$505x^2-4474x+9745=0;\quad x_{12}=\frac{4474\pm\sqrt{4474^2-4\cdot 505\cdot 9745}}{1010}=\frac{4474\pm 576}{1010}$

$x_1=5$; Probe stimmt; $x_2=\frac{1949}{505}=3{,}859$; Probe stimmt; $L=\{5;\ 3{,}859\ \}$

c) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+\frac{5}{2}}=\sqrt{3x+\frac{23}{2}};\quad D=\left[-\frac{1}{2},\infty\right[$

$2x+1+2\cdot\sqrt{(2x+1)\cdot\left(x+\frac{5}{2}\right)}+x+\frac{5}{2}=3x+\frac{23}{2}$

$3x+\frac{7}{2}+2\cdot\sqrt{(2x+1)\cdot\left(x+\frac{5}{2}\right)}=3x+\frac{23}{2};\quad \sqrt{(2x+1)\cdot\left(x+\frac{5}{2}\right)}=8$

$2x^2+6x+\frac{5}{2}=16;\quad 2x^2+6x-\frac{27}{2}=0;\quad x_{12}=\frac{-6\pm\sqrt{36-4\cdot 2\cdot(-27/2)}}{2\cdot 2}=\frac{-6\pm 12}{4}$

$x_1=\frac{3}{2}$; Probe stimmt; $x_2=-4$ scheidet als Lösung aus, da nicht in D; $L=\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

3.39 **d)** $\sqrt{x+5}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x+14}+\sqrt{x-7};\quad D=[7,\infty[$

$x+5+2\cdot\sqrt{(x+5)\cdot(x-2)}+x-2=x+14+2\cdot\sqrt{(x+14)\cdot(x-7)}+x-7$

$\sqrt{x^2+3x-10}-2=\sqrt{x^2+7x-98}$

$x^2+3x-10-2\cdot2\cdot\sqrt{x^2+3x-10}+4=x^2+7x-98$

$\sqrt{x^2+3x-10}=23-x;\quad x^2+3x-10=529-46x+x^2;\quad 49x=539;\ x=11$

die Wurzelgleichung führt hier auf eine lineare Gleichung; Probe stimmt: L = { 11 }

e) $\sqrt{x-4}+\frac{x+1}{\sqrt{x+4}}=\sqrt{x+4}\qquad D=[4,\infty[$

$\sqrt{(x-4)\cdot(x+4)}+x+1=x+4;\quad \sqrt{x^2-16}=3;\quad x^2-16=9;\quad x^2=25$

$x_1 = 5$; Probe stimmt; $x_2 = -5$ scheidet als Lösung aus, da nicht in D; L = { 5 }

f) $\frac{3}{\sqrt{x+5}}-\sqrt{\frac{x}{2x-4}}=0\quad D=]2,\infty[$

$\frac{3}{\sqrt{x+5}}=\sqrt{\frac{x}{2x-4}};\quad \frac{9}{x+5}=\frac{x}{2x-4};\quad 18x-36=x^2+5x;\quad x^2-13x+36=0$

$x_{12}=6{,}5\pm\sqrt{42{,}25-36}=6{,}5\pm2{,}5$

$x_1 = 4$, Probe stimm t; $x_2 = 9$, Probe stimmt; L = {4, 9}

g) $\frac{1}{\sqrt{x+3}}-\frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{x+3}{x}}=0\quad D=]0,\infty[$

$\frac{4}{\sqrt{x+3}}=\sqrt{\frac{x+3}{x}};\quad \frac{16}{x+3}=\frac{x+3}{x};\quad 16x=x^2+6x+9;\quad x^2-10x+9=0$

$x_{12}=5\pm\sqrt{25-9}=5\pm4$

$x_1 = 1$, Probe stimmt; $x_2 = 9$, Probe stimmt; L = {1, 9}

h) $\frac{1}{2-3\cdot\sqrt{x+4}}=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{x+4}$; Definitionsbereich: $x \geq -4$ (Term unter der Wurzel nicht negativ);

ebenfalls darf der Nenner nicht null sein: $2-3\cdot\sqrt{x+4}\neq0 \Rightarrow x\neq-\frac{32}{9}$ (zusätzlich zu $x \geq -4$)

$4=\left(2-3\cdot\sqrt{x+4}\right)\cdot\sqrt{x+4};\quad 4=2\cdot\sqrt{x+4}-3\cdot(x+4);\quad 3x+16=2\cdot\sqrt{x+4}$

$9x^2+96x+256=4\cdot(x+4);\quad 9x^2+96x+256=4x+16;\quad 9x^2+92x+240=0$

$x_{12}=\frac{-92\pm\sqrt{92^2-4\cdot9\cdot240}}{18}=\frac{-92\pm\sqrt{-176}}{18}$

Diskriminante -176 ist negativ, daher keine (reelle) Lösung; L = { }

i) $\frac{1}{2\cdot\sqrt{x-1}-1}=\frac{1}{6}\cdot\sqrt{x-1}$; Definitionsbereich: $x \geq 1$ (Term unter der Wurzel nicht negativ); ebenfalls darf der Nenner nicht null sein: $2\cdot\sqrt{x-1}-1\neq0 \Rightarrow x\neq\frac{5}{4}$ (zusätzlich zu $x \geq 1$)

$6=\left(2\cdot\sqrt{x-1}-1\right)\cdot\sqrt{x-1};\quad 6=2\cdot(x-1)-\sqrt{x-1};\quad \sqrt{x-1}=2x-8;\quad x-1=4x^2-32x+64$

$4x^2-33x+65=0;\quad x_{12}=\frac{33\pm\sqrt{33^2-4\cdot4\cdot65}}{8};\quad x_{12}=\frac{33\pm7}{8}$

$x_1 = 5$, Probe stimmt; $x_2=\frac{13}{4}$, Probe stimmt nicht; L = {5}

3.40 **a)** $\sqrt{x+a}+\sqrt{4a-x}=3\cdot\sqrt{a}$; $x+a+2\cdot\sqrt{(x+a)(4a-x)}+4a-x=9a$ $\sqrt{(x+a)(4a-x)}=2a$

$3ax-x^2+4a^2=4a^2$; $x\cdot(3a-x)=0$

Produkt – Null – Satz $\Rightarrow$ $x_1=0$, Probe stimmt; $x_2=3a$, Probe stimmt; $L=\{0, 3a\}$

b) $\sqrt{4x-t}+\sqrt{2x}=2\cdot\sqrt{t}$; $\sqrt{4x-t}=2\cdot\sqrt{t}-\sqrt{2x}$; $4x-t=4t-4\cdot\sqrt{2\cdot t\cdot x}+2x$

$4\cdot\sqrt{2\cdot t\cdot x}=5t-2x$; $16\cdot 2\cdot t\cdot x=25t^2-20t\cdot x+4x^2$; $4x^2-52\cdot t\cdot x+25t^2=0$

$x_{12}=\frac{52t\pm\sqrt{2704t^2-400t^2}}{8}$; $x_{12}=\frac{52t\pm 48t}{8}$

$x_1=\frac{t}{2}$, Probe stimmt; $x_2=\frac{25t}{2}$, Probe stimmt nicht; $L=\left\{\frac{t}{2}\right\}$

c) $\sqrt{x+m}=\sqrt{3m}-\sqrt{m-x}$; $x+m=3m-2\cdot\sqrt{3m\cdot(m-x)}+m-x$;

$2\cdot\sqrt{3m\cdot^2-3m\cdot x}=3m-2x$; $4\cdot(3m\cdot^2-3m\cdot x)=9m^2-12m\cdot x+4x^2$; $4x^2=3m^2$

$x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}m$; Probe stimmt; $x_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}m$; Probe stimmt; $L=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}m;-\frac{\sqrt{3}}{2}m\right\}$

3.41 **a)** $x^4-5x^2+4=0$; $u=x^2$

$u^2-5u+4=0$

$u_{12}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-4}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25-16}{4}}=\frac{5}{2}\pm\frac{3}{2}$

$u_1=1 \Rightarrow x_1=+1; x_2=-1$

$u_2=4 \Rightarrow x_3=+2; x_4=-2$

$L=\{+1;-1;+2;-2\}$

b) $x^4-3x^2-4=0$; $u=x^2$

$u^2-3u-4=0$

$u_1=-1 \Rightarrow x_{1,2}$ nicht reell

$u_2=4 \Rightarrow x_3=+2$; $x_4=-2$

$L=\{+2;-2\}$

c) $x^4+5x^2+4=0$; $u=x^2$

$u^2+3u+4=0$

$u_1=-1$, $u_2=-4$

keine reelle Lösung

d) $8x^6-9x^3+1=0$; $u=x^3$

$u^2-u+1=0$

$u_1=\frac{1}{8} \Rightarrow x_1=\frac{1}{2}$

$u_2=1 \Rightarrow x_2=1$

$L=\left\{\frac{1}{2}; 1\right\}$

e)

$$4x^4-x^2=4a^2\cdot x^2-a^2$$

$$4x^4-(1+4a^2)\cdot x^2+a^2=0;\quad z=x^2$$

$$4z^2-(1+4a^2)\cdot z+a^2=0$$

$$z=\frac{1+4a^2\pm\sqrt{\left(1+4a^2\right)^2-4\cdot 4\cdot a^2}}{2\cdot 4}=$$

$$=\frac{1+4a^2\pm\sqrt{1+8a^2+16a^4-16a^2}}{8}=$$

$$=\frac{1+4a^2\pm\sqrt{\left(1-4a^2\right)^2}}{8}=\frac{1+4a^2\pm\left(1-4a^2\right)}{8}$$

$$z_1=\frac{1}{4} \Rightarrow x_1=\frac{1}{2};\ x_2=-\frac{1}{2}$$

$$z_2=a^2 \Rightarrow x_3=a;\ x_4=-a$$

$$L=\left\{\frac{1}{2};-\frac{1}{2};a;-a\right\}$$

f)

$$a^2\cdot x^4-x^2+a^2\cdot x^2=1$$

$$a^2\cdot x^4+x^2\cdot(a^2-1)-1=0;\quad u=x^2$$

$$a^2\cdot u^2+(a^2-1)\cdot u-1=0$$

$$u=\frac{a^2-1\pm\sqrt{\left(a^2-1\right)^2-4\cdot a^2\cdot(-1)}}{2\cdot a^2}=$$

$$=\frac{a^2-1\pm\sqrt{a^4+2a^2+1}}{2\cdot a^2}=$$

$$=\frac{a^2-1\pm\sqrt{\left(a^2+1\right)^2}}{2\cdot a^2}=\frac{a^2-1\pm\left(a^2+1\right)}{2\cdot a^2}$$

$$u_1=\frac{1}{a^2} \Rightarrow x_1=\frac{1}{a};\ x_2=-\frac{1}{a}$$

$u_2=-1 \Rightarrow$ keine reelle Lösung

$$L=\left\{\frac{1}{a};-\frac{1}{a}\right\}$$

3.42 **a)** $x^3 - x^2 - 2x = x\cdot(x^2 - x - 2) = 0$
Produkt – Null – Satz: $x = 0$; $x^2 - x - 2 = 0$
$x_1 = 0$; $x_{23} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$
$x_2 = 2$; $x_3 = -1$; $L = \{ 0; 2; -1 \}$

b) $x^3 + x^2 + 2x = x\cdot(x^2 + x + 2) = 0$
Produkt – Null – Satz: $x = 0$; $x^2 + x + 2 = 0$
$x_1 = 0$; $x_{23} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{7}{4}}$ sind keine (reellen) Lösungen; $L = \{0\}$

c) $6x^3 + 2x^2 = 3a\cdot x^2 + a\cdot x$; $6x^3 + (2x - 3a)\cdot x^2 - a\cdot x = x\cdot[6x^2 + (2x - 3a)\cdot x - a] = 0$
Produkt –Null – Satz: $x = 0$; $6x^2 + (2x - 3a)\cdot x - a = 0$; $x_1 = 0$
$x_{23} = \frac{-2+3a \pm \sqrt{4-12a+9a^2+24a}}{12} = \frac{-2+3a \pm \sqrt{4+12a+9a^2}}{12}$; $x_{23} = \frac{-2+3a \pm \cdots(2+3a)}{12}$
$x_2 = -\frac{1}{3}$; $x_3 = \frac{a}{2}$; $L = \left\{0 ; -\frac{1}{3} ; \frac{a}{2}\right\}$

3.43 **a)** $x^2 - 5x + 6 = 0$
$x_1 + x_2 = 5$; $x_1 \cdot x_2 = 6$
$L = \{2 ; 3\}$

b) $x^2 + 5x - 6 = 0$
$x_1 + x_2 = -5$; $x_1 \cdot x_2 = -6$
$L = \{1 ; -6\}$

c) $x^2 - x - 6 = 0$
$x_1 + x_2 = 1$; $x_1 \cdot x_2 = -6$
$L = \{3 ; -2\}$

d) $x^2 + x - 6 = 0$
$x_1 + x_2 = -1$; $x_1 \cdot x_2 = -6$
$L = \{2 ; -3\}$

e) $g^2 - 10g + 21 = 0$
$g_1 + g_2 = 10$; $g_1 \cdot g_2 = 21$
$L = \{3 ; 7\}$

f) $y^2 + 9y + 14 = 0$
$y_1 + y_2 = -9$; $y_1 \cdot y_2 = 14$
$L = \{-2 ; -7\}$

g) $u^2 - 7u - 8 = 0$
$u_1 + u_2 = 7$; $u_1 \cdot u_2 = -8$
$L = \{8 ; -1\}$

h) $x^2 + 10x + 24 = 0$
$x_1 + x_2 = -10$; $x_1 \cdot x_2 = 24$
$L = \{-4 ; -6\}$

i) $x^2 + x - 72 = 0$
$x_1 + x_2 = -1$; $x_1 \cdot x_2 = -72$
$L = \{8 ; -9\}$

j) $c^2 + 2c + 1 = 0$
$c_1 + c_2 = -2$; $c_1 \cdot c_2 = 1$
$L = \{-1\}$

k) $x^2 + 13x - 30 = 0$
$x_1 + x_2 = -13$; $x_1 \cdot x_2 = -30$
$L = \{2 ; -15\}$

l) $b^2 - 6b + 5 = 0$
$b_1 + b_2 = 6$; $b_1 \cdot b_2 = 5$
$L = \{1 ; 5\}$

3.44 **a)** $x^2 - 4x + 3 = 0$; $x_{12} = 2 \pm \sqrt{4-3} = 2 \pm 1$
$x_1 = 3$; $x_2 = 1$
$x^2 - 4x + 3 = (x - x_1)\cdot(x - x_2) = (x - 3)\cdot(x - 1)$

b) $u^2 - 3u - 4 = 0$; $u_{12} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$
$u_1 = 4$; $u_2 = -1$
$u^2 - 3x - 4 = (u - u_1)\cdot(u - u_2) = (u - 4)\cdot(u + 1)$

c) $x^2 + 7x + 12 = (x + 3)\cdot(x + 4)$

d) $s^2 + 4s = s\cdot(s + 4)$

e) $2t^2 - 5t + 2 = 2\cdot\left(t^2 - \frac{5}{2}t + 1\right)$
$t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0$; $t_1 = 2$; $t_2 = \frac{1}{2}$
$2t^2 - 5t + 2 = 2\cdot(t - t_1)\cdot(t - t_2) = (t - 2)\cdot(2t - 1)$

f) $2r^2 - 8r + 6 = 2\cdot\left(r^2 - 4r + 3\right)$
$r^2 - 4r + 3 = 0$; $r_1 = 3$; $r_2 = 1$
$2r^2 - 4r + 6 = 2\cdot(r - r_1)\cdot(r - r_2) = 2\cdot(r - 3)\cdot(r - 1)$

g) $4k^2 - 9k + 2 = 4\cdot\left(k^2 - \frac{9}{4}k + \frac{1}{2}\right)$
$k^2 - \frac{9}{4}k + \frac{1}{2} = 0$; $k_1 = 2$; $k_2 = \frac{1}{4}$
$4k^2 - 9k + 2 = 4\cdot(k - k_1)\cdot(k - k_2) = (k - 2)\cdot(4k - 1)$

h) $6t^2 - 5t + 1 = 6\cdot\left(t^2 - \frac{5}{6}t + \frac{1}{6}\right)$
$t^2 - \frac{5}{6}t + \frac{1}{6} = 0$; $t_1 = \frac{1}{2}$; $t_2 = \frac{1}{3}$
$6t^2 - 5t + 1 = 2\cdot(t - t_1)\cdot 3(t - t_2) =$
$= (2t - 1)\cdot(3t - 1)$

3.45 **a)** $(x-4)\cdot(x-7) = x^2 - 11x + 28 = 0$

b) $(x+1)\cdot(x-2) = x^2 - x - 2 = 0$

c) $(x-3)\cdot(x-3) = x^2 - 6x + 9 = 0$

d) $(x-0)\cdot(x-3) = x^2 - 3x = 0$

e) $(x+2)\cdot(x-2) = x^2 - 4 = 0$

f) $[x - (1+\sqrt{2})]\cdot[x - (1-\sqrt{2})] = [x - 1 - \sqrt{2}]\cdot[x - 1 + \sqrt{2}] =$
$= (*x-1)^2 - 2 = x^2 - 2x - 1 = 0$

g) $(x - a)\cdot(x - (a + b)) =$
$= x^2 - (2a + b)\cdot x + a^2 + a\cdot b = 0$

h) $\left(x + \frac{a}{2}\right)\cdot(x - 4a) = x^2 - \frac{7a}{2}\cdot x - 2a^2 = 0$

3.46 **a)** $q = x_1 \cdot x_2 = -3 \cdot x_2 = -15 \Rightarrow x_2 = 5$
$p = -(x_1 + x_2) = -(-3 + 5) = -2$

b) $p = -(x_1 + x_2) = -(x_1 - 23) = -20 \Rightarrow x_1 = 43$
$q = x_1 \cdot x_2 = 43 \cdot (-23) = -989$

c) $p = -(x_1 + x_2) = -(-7 + x_2) = 15 \Rightarrow x_2 = -8$
$q = x_1 \cdot x_2 = -7 \cdot (-8) = 56$

d) $q = x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot (-8) = 56 \Rightarrow x_1 = -7$
$p = -(x_1 + x_2) = -(-7 + -8) = 15$

3.47 $\frac{x^2}{2} + 4x + m = 0$; die Anzahl der Lösungen hängt von der Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ (Term unter der Wurzel in der Lösungsformel) ab. $D = 4^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot m = 16 - 2m$

a) Nur eine Lösung, wenn $D = 0 \Rightarrow m = 8$

b) Zwei Lösungen, wenn $D > 0 \Rightarrow m < 8$

c) Keine (reelle) Lösung, wenn $D < 0 \Rightarrow m > 8$

3.48 $4x^2 + 8k \cdot x + 9 = 0$; die Anzahl der Lösungen hängt von der Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ (Term unter der Wurzel in der Lösungsformel) ab. $D = (8k)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 64k^2 - 144$

a) Nur eine Lösung, wenn $D = 64k^2 - 144 = 0$, $k^2 = \frac{144}{64} = \frac{9}{4} \Rightarrow k_1 = \frac{3}{2}$, $k_2 = -\frac{3}{2}$

b) Zwei Lösungen, wenn $D = 64k^2 - 144 > 0$, $k^2 > \frac{9}{4} \Rightarrow k > \frac{3}{2}$ oder $k < -\frac{3}{2}$

c) Keine (reelle) Lösung, wenn $D < 0$, $k^2 < \frac{9}{4} \Rightarrow k < \frac{3}{2}$ und zugleich $k > -\frac{3}{2}$, kurz: $-\frac{3}{2} < k < \frac{3}{2}$

3.49 $x^2 + (k-2) \cdot x = 2k - 9$ oder $x^2 + (k-2) \cdot x + 9 - 2k = 0$; Doppellösung, wenn die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ (Term unter der Wurzel in der Lösungsformel) $= 0$ ist.
$D = (k-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (9 - 2k) = k^2 + 4k - 32 = 0 \Rightarrow k_1 = 4, k_2 = -8$

3.50 **a)** I: $x \cdot y + 2x = 5$
$\underline{\text{II: } x - y = 2}$
$\text{II} \Rightarrow y = x - 2$ in I einsetzen:
$x \cdot (x-2) + 2x = 5$
$x^2 = 5;$
$x_1 = \sqrt{5}\ ;\ y_1 = x_1 - 2 = -2 + \sqrt{5}\ ;$
$x_2 = -\sqrt{5}\ ;\ y_2 = -2 - \sqrt{5}$
Lösungspaare:
(2,236; 0,236), (-2,236; -4,236)

b) I: $x^2 + 3xy = 28$
$\underline{\text{II: } 2x + y = 8}$
$\text{II} \Rightarrow y = 8 - 2x$ in I einsetzen:
$x^2 + 3x \cdot (8 - 2x) = 28;\ 5x^2 - 24x + 28 = 0$
$$x_{12} = \frac{24 \pm \sqrt{24^2 - 560}}{10} = \frac{24 \pm 4}{10}$$
$x_1 = 2;\ y_1 = 8 - 2x_1 = 4$
$x_2 = 2{,}8;\ y_1 = 2{,}4$
Lösungspaare: (2; 4), (2,8; 2,4)

c) I: $x^2 + y^2 = 13$
$\underline{\text{II: } x + 2y = 10}$
$\text{II} \Rightarrow x = 10 - 2y$ in I einsetzen:
$5y^2 - 40y + 87 = 0$
$$y_{12} = \frac{40 \pm \sqrt{40^2 - 4 \cdot 5 \cdot 87}}{10} = \frac{40 \pm \sqrt{-140}}{10}$$
Keine (reelle) Lösung!

d) I: $x + y = 5$
$\underline{\text{II}: \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}}$
$\text{I} \Rightarrow x = 5 - y$ in II einsetzen:
$\text{II}: \frac{1}{5-y} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6}$; auf gleichen Nenner bringen und vereinfachen
$y^2 + 7y - 30 = 0;\ y_1 = 3, y_2 = -10$
$x_1 = 5 - y_1 = 2, x_2 = 5 - y_2 = 15$
Lösungspaare: (2; 3), (15; -10)

e) I: $x^2 + y^2 = 5$
$\underline{\text{II: } x^2 - y^2 = 3}$
$\text{I} \Rightarrow y^2 = 5 - x^2$, in II einsetzen: $x^2 - (5 - x^2) = 3;\ 2x^2 = 8;\ x^2 = 4$
$x_1 = 2,\ y_1^2 = 5 - x_1^2 = 1, y_1 = 1, y_2 = -1;\quad x_2 = -2, y_1^2 = 5 - x_2^2 = 1, y_3 = 1, y_4 = -1$
Lösungspaare: (2; 1), (2; -1), (-2; 1), (-2; -1)

3.50 **f)** I: $2x^2 + y^2 = 11$

II: $\underline{\quad x \cdot y = 3}$; II $\Rightarrow$ $y = \frac{3}{x}$, in I einsetzen: $2x^2 + \frac{9}{x^2} = 11$; $2x^4 - 11x^2 + 9 = 0$

Substitution: $u = x^2$; $2u^2 - 11u + 9 = 0 \Rightarrow u_1 = \frac{9}{2}$; $u_2 = 1$

$x_1 = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}$; $y_1 = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$; $\quad x_2 = -\sqrt{\frac{9}{2}} = -\frac{3}{\sqrt{2}} = -\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}$; $y_2 = -\frac{3 \cdot \sqrt{2}}{3} = -\sqrt{2}$

$x_3 = \sqrt{1} = 1$; $y_1 = 3$; $x_2 = -\sqrt{1} = -1$; $y_2 = -3$

Lösungspaare: $\left(\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}; \sqrt{2}\right), \left(-\frac{3}{2} \cdot \sqrt{2}; -\sqrt{2}\right), (1; 3), (-1; -3)$ ·

g) I: $x^2 + 4y^2 = 2a^2$

II: $\underline{\quad 2x \cdot y = a^2}$; II $\Rightarrow$ $y = \frac{a^2}{2x}$, in I einsetzen: $x^2 + \frac{a^4}{x^2} = 2a^2$; $x^4 - 2a^2 \cdot x + a^4 = 0$;

Substitution: $u = x^2$; $u^2 - 2a^2 \cdot u + a^4 = 0 \Rightarrow u_{12} = a^2 \pm \sqrt{a^4 - a^4} = a^2$ (Doppellösung)

$x_1 = \sqrt{a^2} = a$; $y_1 = \frac{a^2}{2x_1} = \frac{a}{2}$; $x_2 = -\sqrt{a^2} = -a$; $y_2 = \frac{a^2}{2x_2} = -\frac{a}{2}$;

Lösungspaare: $\left(a; \frac{a}{2}\right), \left(-a; -\frac{a}{2}\right)$

h) I: $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$

II: $\underline{(x+1)^2 + (y-2)^2 = 10}$

I: $x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 5$

II: $\underline{x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 10}$; II – I $\Rightarrow 4x - 6y = 2$; daraus $y = \frac{2x-1}{3}$; etwa in I

einsetzen: $x^2 + \frac{4x^2 - 4x + 1}{9} - 2x + \frac{4x-2}{3} = 3$; $13x^2 - 10x - 32 = 0$

$x_1 = 2$; $y_1 = \frac{2x_1 - 1}{3} = 1$; $\quad x_2 = -\frac{16}{13}$; $y_2 = \frac{2x_2 - 1}{3} = -\frac{15}{13}$; Lösungspaare: (2; 1), $\left(-\frac{16}{3}; -\frac{15}{3}\right)$

3.51 a Seite des gleichseitigen Dreiecks; $A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$; $82 = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$; $a^2 = \frac{328}{\sqrt{3}}$; $a \approx 13{,}76$ cm

3.52 a, b Katheten, a = 5k, b = 12k; $a^2 + b^2 = 25k^2 + 144k^2 = 26^2$; $k^2 = 4$; k = 2 (-2 nicht sinnvoll);
a = 5·2 = 10 cm; b = 12·2 = 24 cm

3.53 $A = 84{,}0 \cdot 10^{-4}\ m^2 = 84{,}0\ cm^2$; b, c Seiten des Dreiecks; a = x-1, b = x, c = x + 1;

$A = \sqrt{s \cdot (s-a)(s-b)(s-c)}$; $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3x}{2}$; $84 = \sqrt{\frac{3x}{2} \cdot \left(\frac{x}{2} + 1\right) \cdot \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{x}{2} - 1\right)}$

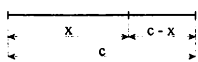
$7056 = \frac{3x^2}{4} \cdot \left(\frac{x^2}{4} - 1\right)$; $7056 = \frac{3x^4}{16} - \frac{3x^2}{4}$; $u = x^2$; $3u^2 - 12u - 112896 = 0$

$u_{12} = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 4 \cdot 3 \cdot 112896}}{6} = \frac{12 \pm 1164}{6}$; $u_1 = 196 \Rightarrow x_1 = \sqrt{196} = 14$; u_2 ist negativ;

Dreiecksseiten: a = x_1 – 1 = 13 cm, b = x_1 = 14 cm, c = x_1 + 1 = 15 cm

3.54 $c : x = x : (c - x)$; $x^2 = c \cdot (c - x)$; $x^2 + c \cdot x - c^2 = 0$

$x_{12} = \frac{-c \pm \sqrt{5c^2}}{2}$; $x_1 = \frac{-c + c \cdot \sqrt{5}}{2}$ (x_2 ist negativ); $\frac{x_1}{c} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}618$;



Die größere Länge x beträgt rund 62% der Gesamtlänge c.

3.55 Rechteckseiten: x, y; P(x/y) liegt auf der Geraden mit der Gleichung $y = k \cdot x + d$ durch A und B: $k = -\frac{4}{3}$, $d = 4$; somit: $y = -\frac{4}{3} \cdot x + 4$; Flächeninhalt: $x \cdot y = x \cdot \left(-\frac{4}{3} \cdot x + 4\right) = \frac{5}{3}$; $4x^2 - 12x + 5 = 0$;
$x_1 = \frac{5}{2}$, $y_1 = -\frac{4}{3} \cdot x_1 + 4 = \frac{2}{3} \Rightarrow P_1\left(\frac{5}{2}/\frac{2}{3}\right)$; $x_2 = \frac{1}{2}$, $y_2 = -\frac{4}{3} \cdot x_2 + 4 = \frac{10}{3} \Rightarrow P_2\left(\frac{1}{2}/\frac{10}{3}\right)$.
Ein Rechteck mit der Fläche $\frac{5}{3}$ besitzt die Seiten $\frac{5}{2}$ und $\frac{2}{3}$ oder auch $\frac{1}{2}$ und $\frac{10}{3}$.
Fläche in Abhängigkeit von x: $A(x) = x \cdot \left(-\frac{4}{3} \cdot x + 4\right)$; für welches x ist A(x) am größten? Die Funktion A(x) ist eine quadratische Funktion, ihr Graph also eine Parabel; diese öffnet sich nach unten. Daher ist A(x) maximal im Scheitel der Parabel. Die x-Koordinate x_S des Scheitels liegt genau in der Mitte zwischen den Nullstellen von A(x): A(x) = 0; Produkt – Null – Satz: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ (was auch unmittelbar aus Abb. 3.19 ersichtlich ist). $x_S = 1{,}5$; $y_S = -\frac{4}{3} \cdot x_S + 4 = 2$.
Das flächengrößte Rechteck hat somit die Seiten 1,5 und 2; $A_{max} = 1{,}5 \cdot 2 = 3$.

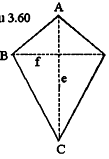
3.56 Rechteckseiten: x, y; $2x + 2y = 5 \Rightarrow y = \frac{5-2x}{2}$; $x \cdot y = x \cdot \frac{5-2x}{2} = 1{,}5$; $2x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow$
$x_1 = 1$, $y_1 = \frac{5-2x_1}{2} = \frac{3}{2}$; $x_2 = \frac{3}{2}$, $y_2 = \frac{5-2x_2}{2} = 1$; es lässt sich also ein Rechteck mit der Fläche $1{,}5\ m^2$ bilden; seine Seitenlängen sind 1 m und 1,5 m.
Fläche in Abhängigkeit von x: $A(x) = x \cdot \frac{5-2x}{2}$; für welches x ist A(x) am größten? Die Funktion A(x) ist eine quadratische Funktion, ihr Graph also eine Parabel; diese öffnet sich nach unten. Daher ist A(x) maximal im Scheitel der Parabel. Die x-Koordinate x_S des Scheitels liegt genau in der Mitte zwischen den Nullstellen von A(x): A(x) = 0; Produkt – Null – Satz: $x_1 = 0, x_2 = \frac{5}{2}$.
$x_S = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} = 1{,}25$ m; $y_S = \frac{5-2x_S}{2} = 1{,}25$ m. Das flächengrößte Rechteck ist ein Quadrat mit der Seite 1,25 m. Seine Fläche beträgt $1{,}25^2\ m^2 \approx 1{,}56\ m^2$.

3.57 x Quadratseite; Fläche alt: x^2; Fläche neu: $(x+2) \cdot (x+5)$; $1{,}8 \cdot x^2 = (x+2) \cdot (x+5)$; $4x^2 - 35x - 50 = 0$; $x_1 = 10$; x_2 ist negativ. Das Rechteck hat die Seiten 12 cm und 15 cm.

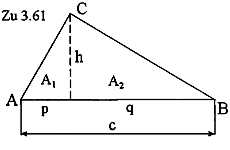
3.58 x kürzere Rechteckseite, y längere Seite; $x^2 + y^2 = 2500$; $x + 5 = y - 5 \Rightarrow y = x + 10$;
$x^2 + x^2 + 20x + 100 = 2500$; $x^2 + 10x - 1200 = 0$; $x_1 = 30$; x_2 ist negativ. Die Seiten haben daher die Längen 30 cm und 40 cm.

3.59 Rechteckseiten: x, y; $x \cdot y = 24$; $x : y = 8 : 5 \Rightarrow y = \frac{5x}{8}$; $x \cdot y = \frac{5x^2}{8} = 24 \Rightarrow x_1 = 6{,}1968 \approx 6{,}20$;
x_2 ist negativ; $y_1 = \frac{5x_1}{8} = 3{,}8730 \approx 3{,}87$. Die Seiten sind daher ca. 6,20 cm und 3,87 cm lang.

Zu 3.60



Zu 3.61



3.60 $\frac{e \cdot f}{2} = 275$; $f = e - 3$; $\frac{e \cdot (e-3)}{2} = 275$; $e^2 - 3e - 550 = 0$
$e_{12} = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 550} = 1{,}5 \pm 23{,}5$; $e_1 = 25\text{cm}$ (e_2 negativ); $f = e_1 - 3 = 22\text{cm}$

3.61 Siehe Abbildung.

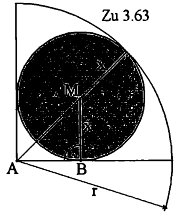
$A_1 = \frac{p \cdot h}{2}$; $A_2 = \frac{q \cdot h}{2}$; $\frac{p \cdot h}{2} : \frac{q \cdot h}{2} = 1:5$; $\frac{5 \cdot p \cdot h}{2} = \frac{q \cdot h}{2} \Rightarrow q = 5p$; $p + q = p + 5p = 20$; $6p = 20$

$\Rightarrow p = \frac{20}{6}$; $q = \frac{100}{6}$; $h^2 = p \cdot q$ (Höhensatz); $h = \sqrt{p \cdot q} = \sqrt{\frac{2000}{36}} = \frac{20 \cdot \sqrt{5}}{6} = \frac{10 \cdot \sqrt{5}}{3}$ cm $\approx 7{,}5$ cm

3.62 $h = r + 3$; $O = 2\pi r \cdot (r + \cdot h) = 2\pi r \cdot (r + \cdot r + 3) = 378\pi$; $2r^2 + 3r - 189 = 0$; $r_1 = 9$ cm (r_2 ist negativ); $h = 12$ cm

3.63 Das Dreieck ABM ist rechtwinkelig. $\overline{AB} = x$;
$\overline{AM} = r - x$; $x^2 + x^2 = (r - x)^2$, $2x^2 = (r - x)^2$; $\sqrt{2} \cdot x = r - x$;

$x = \frac{r}{\sqrt{2}+1} = \frac{r}{\sqrt{2}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \frac{r \cdot (\sqrt{2}-1)}{2-1} = r \cdot (\sqrt{2} - 1) \approx 5{,}0$ cm



3.64 R äußerer Radius, r innerer Radius; $R = r + 0{,}2$;

$V = \frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot (R^3 - r^3)$; $m = \frac{4 \cdot \pi \cdot \rho}{3} \cdot (R^3 - r^3)$; $32{,}882 \cdot (R^3 - r^3) = 24{,}5$;

$(r + 0{,}2)^3 - r^3 = 0{,}7451$; $r^3 + 0{,}6r^2 + 0{,}12r + 0{,}008 - r^3 = 0{,}7451$;

$0{,}6r^2 + 0{,}12r - 0{,}7371 = 90$

$r_{12} = \frac{-0{,}12 \pm \sqrt{0{,}0144 + 1{,}7690}}{1{,}2} = \frac{-0{,}12 \pm 1{,}3354}{1{,}2}$; $r_1 = 1{,}013$ dm (r_2 negativ); $R = 1{,}213$ dm;

Außendurchmesser: $2R = 2{,}4257$ cm $\approx 24{,}3$ cm

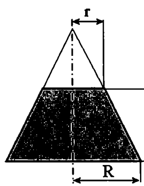
3.65 Kegelstumpfvolumen: $V = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2)$;

$V = 15\, l = 15000$ cm^3; $h = 3$ dm $= 30$ cm; $R = 15$ cm;

$15000 = \frac{30\pi}{3} \cdot (225 + 15r + r^2)$; $\frac{15000}{\pi} = 2250 + 150r + 10r^2$

$r^2 + 15r - 252{,}4648$; $r_{12} = -7{,}5 \pm \sqrt{56{,}25 + 252{,}4648} = -7{,}5 \pm 17{,}5703$.

$r_1 = 10{,}0703$ cm (r_2 ist negativ); Durchmesser $d = 2r_1 \approx 20{,}1$ cm



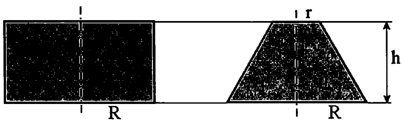
3.66 $V_{Zyl} = \pi \cdot R^2 \cdot h = \pi \cdot 14^2 \cdot 40 = 7840\pi$

$V_{KegStumpf} = \frac{\pi \cdot h}{3} \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2)$

$3920\pi = \frac{40 \cdot \pi}{3} \cdot (14^2 + 14r + r^2)$

$294 = 196 + 14r + r^2$; $r^2 + 14r - 98 = 0$

$r_{12} = -7 \pm \sqrt{49 + 98} = -7 \pm 12{,}1244$; $r_1 = 5{,}1244 \approx 5{,}1$ cm (r_2 negativ);



3.67 $A_{aussen} = 100 \cdot 120 = 12000$ cm^2; $A_{Rahmen} = 4000$ cm^2;

$A_{innen} = (120 - 2x) \cdot (100 - 2x) = 12000 - 440x + 4x^2$;

$A_{Rahmen} = A_{aussen} - A_{innen} \Rightarrow 4000 = 12000 - (12000 - 440x + 4x^2)$; $x^2 - 110x + 1000 = 0$;

$x_{12} = 55 \pm \sqrt{55^2 - 1000} = 55 \pm 45$; $x_1 = 10$ cm ($x_2 = 100$ sachlich nicht sinnvoll);

$A_{aussen} = 12000$ cm^2; $A_{innen} = 8000$ cm^2; $A_{Rahmen} = 4000$ cm^2

3.68 Elektriker A braucht allein x Tage, Elektriker B braucht allein x + 10 Tage; A schafft pro Tag daher den Anteil $\frac{1}{x}$, B schafft den Anteil $\frac{1}{x+10}$ der Arbeit. Zusammen schaffen sie pro Tag $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+10}$ der Arbeit, in 12 Tagen die gesamte Arbeit: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+10}=1$.
$12\cdot(x+10)+12x = x\cdot(x+10)$; $x^2-14x-120=0$; $x_{12}=7\pm\sqrt{7^2+120}=7\pm13$
$x_1 = 20$ Tage (x_2 ist negativ). A braucht allein 20 Tage, B allein 30 Tage.

3.69 Die zweite Pumpe braucht allein x Stunden, die erste Pumpe allein x - 6 Stunden für die Auspumparbeit. Allein schafft daher die zweite Pumpe in einer Stunde den Anteil $\frac{1}{x}$ der Arbeit, die erste Pumpe den Anteil $\frac{1}{x-6}$. Zusammen schaffen sie in einer Stunde den Anteil $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-6}$ der Arbeit, in 4 Stunden die gesamte Arbeit: $4\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-6}\right)=1$.
$4x+4\cdot(x-6)=x\cdot(x-6)$; $x^2-14x+24=0$; $x_{12}=7\pm\sqrt{7^2-24}=7\pm5$; $x_1 = 12$ Tage. $x_2 = 2$ als Zeit der zweiten Pumpe ist nicht möglich, da sonst $x_2 - 6 = -4$ die Zeit der ersten Pumpe wäre. Allein braucht daher die erste Pumpe 6 Stunden, die zweite Pumpe 12 Stunden zum Auspumpen.

3.70 x mittlere Geschwindigkeit in km/h zum Zielort, x + 15 jene auf der Rückfahrt.
Fahrzeit zum Zielort + Fahrzeit auf der Rückfahrt = 15,5 Stunden, also
$\frac{680}{x}+\frac{680}{x+15}=15{,}5$; $680\cdot(x+15)+680x=15{,}5x\cdot(x+15)$;
$31x^2-2255x-20400=0$; $x_{12}=\frac{2255\pm\sqrt{2255^2+4\cdot31\cdot20400}}{62}=\frac{2255\pm2759{,}4610}{62}$.
Mittlere Geschwindigkeit zum Zielort: $x_1 = 80{,}878 \approx 81$ km (x_2 ist negativ).

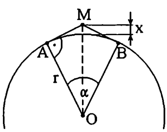
3.71 x Geschwindigkeit in km/h vorher, x + 9 Geschwindigkeit nachher.
Fahrzeit vorher – 0,25 Stunden = Fahrzeit nachher:
$\frac{45}{x}-0{,}25=\frac{45}{x+9}$; $45\cdot(x+9)-0{,}25x\cdot(x+9)=45x$;
$x^2+9x-1620=0$; $x_{12}=\frac{-9\pm\sqrt{9^2+4\cdot1620}}{22}=\frac{-9\pm81}{2}$; $x_1 = 36$ km/h Durchschnittsgeschwindigkeit vorher, 45 km /h nachher (x_2 ist negativ).

3.72 x Geschwindigkeit in km/h, x + 2 die höhere Geschwindigkeit.
Fahrzeit – 1 Stunde = Fahrzeit mit der höheren Geschwindigkeit: $\frac{40}{x}-1=\frac{40}{x+2}$;
$40\cdot(x+2)-x\cdot(x+2)=40x$; $x^2+2x-80=0$; $x_{12}=-1\pm\sqrt{1+80}=-1\pm9$; $x_1 = 8$ km/h war die Bootsgeschwindigkeit (x_2 ist negativ).

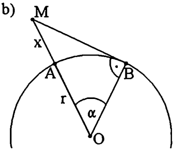
3.73 Bogenlänge $b=\widehat{AB}=\frac{r\pi\alpha}{180°}$ $\Rightarrow$

$\alpha=\frac{300\cdot180°}{6370\cdot\pi}=2{,}698°$

Zu a)



Zu b)



a) $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{\overline{OM}}$ $\Rightarrow$ $\overline{OM} = 6371{,}767$ km
Höhe $x = \overline{OM} - r = 1{,}766 \approx 2$ km

b) $\cos\alpha=\frac{r}{\overline{OM}}$ $\Rightarrow$ $\overline{OM} = 6377{,}071$ km; Höhe $x = \overline{OM} - r = 7{,}071 \approx 7$ km

3.74 Gesamtwiderstand R, Einzelwiderstände R_1 und R_2;
$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$; $\frac{1}{63}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_1+120}$; $R_1\cdot(R_1+120)=63\cdot(R_1+120)+63R_1$; $R_1^2-6R_1-7560=0$;
$(R_1)_{12}=3\pm\sqrt{9+7560}=3\pm 87$; $R_1=90\,\Omega$ (die zweite Lösung für R_1 ist negativ);
$R_2 = 90 + 120 = 210\,\Omega$. Die beiden Widerstände haben die Werte $90\,\Omega$ und $210\,\Omega$

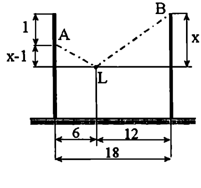
3.75 Widerstände R_1 und R_2; Reihenschaltung: $\frac{180}{R_1+R_2}=1 \Rightarrow R_1 + R_2 = 180$; $R_2 = 180 - R_1$;
Parallelschaltung: $\frac{180}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}}=4{,}5$; $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{180}{4{,}5}$; $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{180-R_1}=\frac{1}{40}$;
einfachheitshalber setzen wir x für R_1: $\frac{1}{x}+\frac{1}{180-x}=\frac{1}{40}$;
$40\,.(180 - x) + 40\cdot x = x\,(180 - R_1)$; $x^2 - 180\cdot x + 7200 = 0$; $x_{12}=90\pm\sqrt{8100-7200}=90\pm 30$;
$x_1 = 60$; $x_2 = 120$. Es gibt zwei Lösungen für R_1: $60\,\Omega$ und $120\,\Omega$.
Die Lösungen für R_2 lauten: $180 - R_1$, also $180 - 60 = 120\,\Omega$ sowie $180 - 120 = 60\,\Omega$.
Somit haben die beiden Widerstände die Werte $60\,\Omega$ bzw. $120\,\Omega$.

3.76 $U=\frac{P}{I}+R\cdot I$; $R=1{,}78\cdot 10^{-8}\cdot\frac{420}{4\cdot 10^{-6}}=1{,}869\,\Omega$; $230=\frac{1500}{I}+1{,}869\cdot I$;
$1{,}869\cdot I^2 - 230\cdot I + 1500 = 0$; $I_{12}=\frac{230\pm\sqrt{230^2-4\cdot 1{,}869\cdot 1500}}{2\cdot 1{,}869}=\frac{230\pm 204{,}171}{3{,}738}$;
$I_1 = 6{,}910 \approx 6{,}9$ A als sinnvolle Stromstärke. Als zweite Lösung ergibt sich $I_2 \approx 116$ A.
Diese Lösung ist aber aus elektrotechnischen Gründen auszuschließen. Die hohe Stromstärke würde zu einer unzulässig großen Überlastung von Motor und Leitung führen. Sie hätte eine Abschaltung durch die vorgeschriebenen Überstromschutzorgane zur Folge.

3.77 $\frac{1}{R_x}=\frac{1}{R}+\frac{1}{R+R_x}$; $R\cdot(R+R_x)=R_x\cdot(R+R_x)+R_x\cdot R$; $R_x^2+R_x\cdot R-R^2=0$;
$(R_x)_{12}=-\frac{R}{2}\pm\sqrt{\frac{R^2}{4}+R^2}=-\frac{R}{2}\pm\frac{R}{2}\sqrt{5}$; $R_x=\frac{R}{2}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\approx 0{,}62R$ (die zweite Lösung ist negativ)

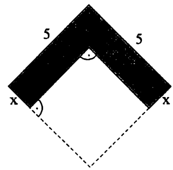
3.78 x Brunnentiefe; $x=\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2$ (t Fallzeit des Steines), $t=\sqrt{\frac{2x}{10}}=\sqrt{\frac{x}{5}}$;
$x = 340\cdot t$ (t Zeit des Schalls), $t=\frac{x}{340}$; Fallzeit des Steines + Zeit des Schalls = 4, also
$\sqrt{\frac{x}{5}}+\frac{x}{340}=4$; $\sqrt{\frac{x}{5}}=4-\frac{x}{340}$; $\frac{x}{5}=16-\frac{8x}{340}+\frac{x^2}{340^2}$; $x^2-25840x+1849600=0$;
$x_{12}=12920\pm\sqrt{12920^2-1849600}=12920\pm 12848{,}2$; $x_1 \approx 72$ m (x_2 ist negativ).
Der Brunnen ist 72 m tief.

3.79 $\overline{AL}+\overline{LB}=20$; $\overline{AL}=\sqrt{6^2+(x-1)^2}$; $\overline{LB}=\sqrt{12^2+x^2}$



$\sqrt{6^2+(x-1)^2}+\sqrt{12^2+x^2}=20$; $\sqrt{6^2+(x-1)^2}=20-\sqrt{12^2+x^2}$
$6^2+(x-1)^2=400-40\cdot\sqrt{12^2+x^2}+12^2+x^2$
$36+x^2-2x+1=400-40\cdot\sqrt{12^2+x^2}+144+x^2$
$40\cdot\sqrt{12^2+x^2}=2x+507$
$1600\cdot(144+x^2)=4x^2+2028x+257049$;
$1596x^2-2028x-26649=0$
$x_{12}=\frac{2028\pm\sqrt{2028^2+4\cdot 1596\cdot 26649}}{3192}=\frac{2028\pm 13200}{3192}$; $x_1\approx 4{,}8$ m (x_2 ist negativ)

3.80 Die Kollektorfläche kann als Differenz zweier Quadratflächen betrachtet werden.

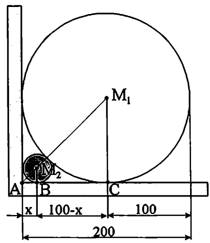


$15 = 5^2 - (5-x)^2;\ 15 = 25 - (25 - 10x + x^2);\ x^2 - 10x + 15 = 0$

$x_{12} = 5 \pm \sqrt{25-15} = 5 \pm 3{,}16;\ x_1 = 1{,}84\,\text{m}.$

Die zweite Lösung $x_2 = 8{,}16$ m ist sachlich nicht sinnvoll.

3.81 Rechtwinkliges Dreieck ACM_1:



$100^2 + 100^2 = \overline{AM_1}^2 \Rightarrow \overline{AM_1} = 100 \cdot \sqrt{2}$

Rechtwinkliges Dreieck ABM_2:

$x^2 + x^2 = \left(\overline{AM_1} - x - 100\right)^2;\ 2x^2 = \left(100 \cdot \sqrt{2} - x - 100\right)^2;$

$2x^2 = \left(100 \cdot \left(\sqrt{2} - 1\right) - x\right)^2$ oder $2x^2 = (41{,}421 - x)^2$ (*)

$2x^2 = 1715{,}729 - 82{,}843 \cdot x + x^2;$

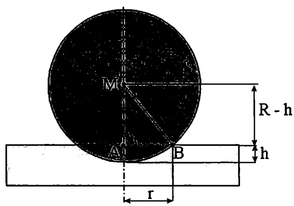
$x^2 + 82{,}843 \cdot x - 1715{,}729 = 0;$

$x_{12} = -41{,}421 \pm \sqrt{41{,}421^2 + 1715{,}843} = -41{,}421 \pm 58{,}579$

$x_1 = 17{,}157 \approx 17{,}2$ cm (x_2 ist negativ).

Anmerkung: Statt in (*) auf der rechten Seite auszuquadrieren und danach die quadratische Gleichung nach der Lösungsformel zu lösen, kann auch auf beiden Seiten die Wurzel gezogen werden.

3.82 $R = \frac{D}{2} = 5\,\text{mm};\ r = \frac{d}{2} = 2{,}5\,\text{mm}$



Rechtwinkliges Dreieck ABM:

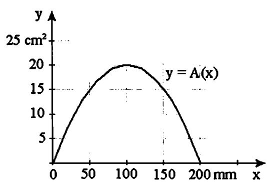
$R^2 = r^2 + (R-h)^2;\ 5^2 = 2{,}5^2 + (5-h)^2;$

$25 = 6{,}25 = (5 - h)^2;\ 18{,}75 = (5 - h)^2;$

$\pm\sqrt{18{,}75} = 5 - h;\ h_1 = 5 \pm \sqrt{18{,}75};$

$h_1 = 0{,}67$ mm; $h_2 = 9{,}33$ mm ist sachlich nicht sinnvoll

3.83 $A(x) = (400 - 2x) \cdot x = 15000;\ x^2 - 200x + 7500 = 0$



$x_{12} = 100 \pm \sqrt{10000 - 7500} = 100 \pm 50$

$x_1 = 50$ mm sowie $x_2 = 150$ mm sind die Lösungen.

Die Querschnittsflächenfunktion $y = A(x)$ ist eine quadratische Funktion; ihr Graph ist eine Parabel: sie öffnet sich nach unten. Ihr Maximum liegt im Scheitel. Dieser befindet sich in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen der Funktion $y = A(x)$:

$A(x) = (400 - 2x) \cdot x = 0$; Produkt – Null – Satz: $x = 0$, d.h. $x_1 = 0$, sowie $400 - 2x = 0$, d.h. $x_2 = 200$.

Maximum von $A(x)$: $x_{max} = \frac{0+200}{2} = 100$ mm; $A_{max} = (400 - 2 \cdot 100) \cdot 100\ \text{mm}^2 = 200\ \text{cm}^2$

3.84 $g = 180 - b;\ \frac{1}{180-b} + \frac{1}{b} = \frac{1}{40};\ 40b + 40 \cdot (180 - b) = b \cdot (180 - b);\ b^2 - 180b + 7200 = 0$

$b_{12} = 90 \pm \sqrt{8100 - 7200} = 90 \pm 30;\ b_1 = 60\,\text{cm}$ oder $b_2 = 120\,\text{cm}$

3.85 Rechtwinkliges Dreieck AM_1M_2:

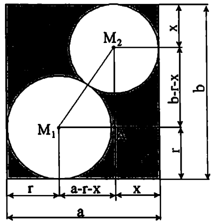
$(a-r-x)^2+(b-r-x)^2=(r+x)^2$

$(32-x)^2+(46-x)^2=(18+x)^2$

$x^2-192x+2816=0;\ x_{12}=96\pm\sqrt{96^2-2816}=96\pm 80$

x_1 = 16 mm als gesuchter Radius;

x_2 = 176 mm ist sachlich nicht sinnvoll



3.86 Rechtwinkliges Dreieck $M_1M_2M_3$:

$d^2+d^2=\overline{M_1M_3}^2;\ \overline{M_1M_3}=d\cdot\sqrt{2}$

$\frac{d}{2}+\overline{M_1M_2}+\frac{d}{2}=D;\ d+d\sqrt{2}=D$

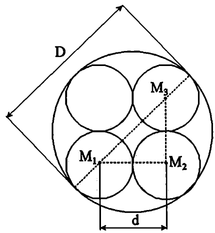
$d=\frac{D}{1+\sqrt{2}}=\frac{D}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{D\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}{2-1}=D\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\approx 33\text{ mm.}$

Lösungsvariante:

$d^2+d^2=(D-d)^2;\ 2d^2=D^2-2D\cdot d+d^2$

$d^2+2D\cdot d-D^2=0;\ d_{12}=-D\pm\sqrt{D^2+D^2}=-D\pm D\cdot\sqrt{2}$

$d_1=D\cdot((\sqrt{2}-1)\approx 33$ mm; d_2 ist negativ.



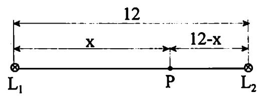
3.87 E_1, E_2 sind die Beleuchtungsstärken der beiden Lampen;

$E_1=\frac{4\cdot I}{x^2};\ E_2=\frac{I}{(12-x)^2};\ \frac{4\cdot I}{x^2}=\frac{I}{(12-x)^2}$

$4\cdot(12-x)^2=x^2;\ 3x^2-96x+576=0;\ x^2-32x+192=0$

$x_{12}=16\pm\sqrt{16^2-192}=16\pm 8;\ x_1=8$ m;

x_2 = 24 m wäre die Lösung im Abstand 24 m, also rechts über L_2 hinaus; diese scheidet aber hier auf Grund der Fragestellung „ ... *zwischen* den beiden Glühlampen “ aus.



3.88 $s=v-\frac{a}{100}+\frac{1}{2a}\cdot\left(v-\frac{a}{10}\right)^2;\ s=v-\frac{a}{100}+\frac{v^2}{2a}-\frac{v}{10}+\frac{a}{200};\ s=\frac{1}{2a}\cdot v^2+\frac{9}{10}\cdot v-\frac{a}{200}$

a) $a=7{,}5\text{ m/s}^2=15/2\text{ m/s}^2$

$80=\frac{1}{15}v^2+\frac{9}{10}\cdot v-\frac{3}{80}$

$16v^2+216\cdot v-19209=0$

$v_{12}=\frac{-216\pm\sqrt{216^2-4\cdot 16\cdot(-19209)}}{2\cdot 16}$

$v_1=28{,}55\text{ m/s}\approx 103\text{ km/h};\ (v_2\text{ negativ})$

b) $a=5{,}5\text{ m/s}^2=11/2\text{ m/s}^2$

$80=\frac{1}{11}\cdot v^2+\frac{9}{10}\cdot v-\frac{11}{400}$

$400v^2+3960\cdot v-352121=0$

$v_{12}=\frac{-3960\pm\sqrt{3960^2-4\cdot 400\cdot(-352121)}}{2\cdot 400}$

$v_1=25{,}13\text{ m/s}\approx 90\text{ km/h};\ (v_2\text{ negativ})$

c) $a=1\text{ m/s}^2$

$80=\frac{1}{2}\cdot v^2+\frac{9}{10}\cdot v-\frac{1}{200}$

$100v^2+180\cdot v-16001=0$

$v_{12}=\frac{-180\pm\sqrt{180^2-4\cdot 100\cdot(-16001)}}{2\cdot 100}$

$v_1=11{,}78\text{ m/s}\approx 42\text{ km/h}$

(v_2 negativ)

d) $v=90\text{ km/h}=25\text{ m/s}$

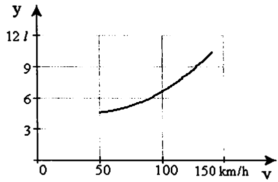
$s=\frac{1}{2a}\cdot v^2+\frac{9}{10}\cdot v-\frac{a}{200};\ 80=\frac{625}{2a}+\frac{9\cdot 25}{10}-\frac{a}{200}$

$0=\frac{625}{2a}-57{,}5-\frac{a}{200};\ a^2+11500a-62500=0$

$a_{12}=-5750\pm\sqrt{5750^2+62500}$

$a_1\approx 5{,}4\text{ m/s}^2$ (a_2 ist negativ)

3.89 **a)** $y(130) = 9{,}231 \approx 9{,}2\ l$



b) 80% von 9,231 = 7,385 l;

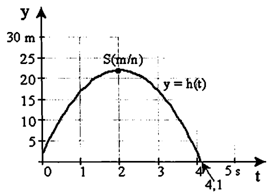
$$7{,}385 = 0{,}00059v^2 - 0{,}048v + 5{,}5$$

$$0{,}00059v^2 - 0{,}048v - 1{,}885 = 0$$

$$v_{12} = \frac{0{,}048 \pm \sqrt{0{,}048^2 + 4 \cdot 0{,}00059 \cdot 1{,}885}}{2 \cdot 0{,}00059}$$

$v_1 = 110{,}3 \approx 110$ km/h (v_2 ist außerhalb des Gültigkeitsbereichs der Formel)

3.90 **a)** $h(t) = 2 + 20 \cdot t - 5t^2$ ... quadratische Funktion, Graph ist eine Parabel

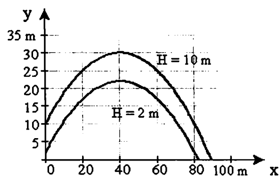


Scheitelgleichung: $h(t) = -5 \cdot (t^2 + 4\,t + 4 - 4) + 2 =$
$-5 \cdot (t^2 + 4\,t + 4) + 5 \cdot 4 + 2 = -5 \cdot (t-2)^2 + 22$;
Scheitelkoordinaten S(m/n), m = 2, n = 22.
Die maximale Höhe 22 m wird nach 2 Sekunden erreicht.
Lösungsvariante: Man ermittelt die Nullstellen der Funktion y = h(t); der x–Koordinate des Scheitels liegt genau in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen.

b) $y = h(t) = 2 + 20 \cdot t - 5t^2 = 0$;

$$t_{12} = \frac{20 \pm \sqrt{400+40}}{10} = \frac{20 \pm 20{,}98}{10};$$ $t_1 \approx 4{,}1$ s (die negative Nullstelle t_2 scheidet aus)

3.91 **a)** H = 2 m:



$$h(x) = -\frac{x^2}{80} + x + 2 = -\frac{1}{80} \cdot (x - 80x + 1600 - 1600) + 2 =$$

$$= -\frac{1}{80} \cdot (x - 80x + 1600) + \frac{1600}{80} + 2 = -\frac{1}{80} \cdot (x - 40)^2 + 22$$

d.h. maximale Flughöhe von 22 m bei x = 40 m.

$$-\frac{x^2}{80} + x + 2 = 0; \quad x^2 - 80x - 160 = 0$$

$$x_{12} = 40 \pm \sqrt{1600 + 160} = 40 \pm 41{,}95$$

Wurfweite $x_1 = 81{,}95 \approx 82$ m (x_2 negativ)

H = 10 m:

$$h(x) = -\frac{x^2}{80} + x + 10 = -\frac{1}{80} \cdot (x - 80x + 1600 - 1600) + 10 = -\frac{1}{80} \cdot (x - 80x + 1600) + \frac{1600}{80} + 10 =$$

$$= -\frac{1}{80} \cdot (x - 40)^2 + 30,$$ d.h. maximale Flughöhe von 30 m bei x = 40 m.

$$-\frac{x^2}{80} + x + 10 = 0; \quad x^2 - 80x - 800 = 0; \quad x_{12} = 40 \pm \sqrt{1600 + 800} = 40 \pm 48{,}99$$

Wurfweite $x_1 = 88{,}99 \approx 89$ m (x_2 negativ)

b) Schnitt der Graphen von $y = h(x) = -\frac{x^2}{80} + x + 10$ mit der „Geländefunktion" $y = k \cdot x = 0{,}1 \cdot x$:

$$-\frac{x^2}{80} + x + 2 = 0{,}1 \cdot x; \quad x^2 - 72x - 160 = 0; \quad x_1 = 74{,}158\ (x_2\ \text{negativ}); \quad y(x_1) = 7{,}416$$

$$\overline{AB} = \sqrt{74{,}158^2 + 7{,}416^2} = 74{,}53 \approx 75\text{m}$$

3.92 Beispiel 3.9: $G(x) = -0{,}05\cdot x^2 + 6x - 100 = 0$; $x_{12} = \dfrac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot(-0{,}05)\cdot(-100)}}{2\cdot(-0{,}05)} = \dfrac{-6\pm 4}{-0{,}1}$;

Gewinngrenzen: $x_1 = 20$ ME; $x_2 = 100$ ME

Aufgabe 3.18: $G(x) = -0{,}01x^2 + 7x - 600 = 0$, $x_{12} = \dfrac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot(-0{,}01)\cdot(-600)}}{2\cdot(-0{,}01)} = \dfrac{-7\pm 5}{-0{,}02}$;

Gewinngrenzen: $x_1 = 100$ ME; $x_2 = 600$ ME

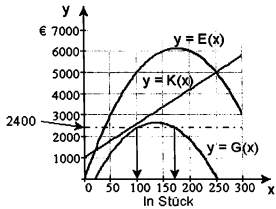
Aufgabe 3.19: $G(x) = -0{,}05x^2 + 94x - 6000 = 0$; $x_{12} = \dfrac{-94\pm\sqrt{94^2-4\cdot(-0{,}05)\cdot(-6000)}}{2\cdot(-0{,}05)}$;

Gewinngrenzen: $x_1 = 66{,}16$; $x_2 = 1813{,}84$.
Gewinn zwischen 67 Stück und 1813 Stück

Aufgabe 3.20: $G(x) = -x^2 + 120x - 2000 = 0$; $x_{12} = \dfrac{-120\pm\sqrt{120^2-4\cdot(-1)\cdot(-2000)}}{2\cdot(-1)} = \dfrac{-120\pm 80}{-2}$;

Gewinngrenzen: $x_1 = 20$ Stück; $x_2 = 100$ Stück

3.93 $K(x) = 1000 + 16x$; $E(x) = -0{,}2x^2 + 70x$
$G(x) = E(x) - K(x) = -0{,}2x^2 + 54x - 1000$
Gewinn mindestens 2400 €:
$-0{,}2x^2 + 54x - 1000 = 2400$; $x^2 - 270x + 17000 = 0$
$x_{12} = 135 \pm \sqrt{135^2 - 17000} = 135 \pm 35$
$x_1 = 100$ Stück, $x_2 = 170$ Stück.
Die Stückzahl muss zwischen 100 Stück und 170 Stück (jeweils inklusive) liegen.



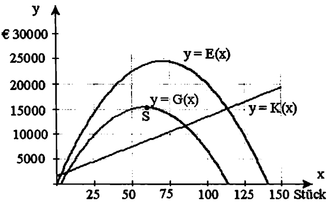
3.94 *1. Lösungsvariante:*
n Anzahl der Preisreduktionen um 1 € pro Stück ausgehend von 200 €: Stückpreis $p = 200 - n$; abgesetzte Menge ausgehend von 500 Stück: $x = 500 + 5\cdot n$. Der Erlös oder Umsatz ist gleich Stückpreis p mal abgesetzte Stückzahl x. Erlös in Abhängigkeit von n Preisreduktionen um 1 €: $E(n) = (200 - n)\cdot(500 + 5n)$. Erlös bei $p = 200$ €: $200\cdot(-5\cdot 200 + 1500) = 100000$ €. Bei welchem Preis steigt der Erlös (Umsatz) um 10%, also auf 110000 €? $(200 - n)\cdot(500 + 5n) = 110000$;
$n^2 - 100n + 2000 = 0$; $n_{12} = 50 \pm \sqrt{50^2 - 2000} = 50 \pm 10\cdot\sqrt{5}$;
$n_1 = 27{,}6 \approx 28$ Preisreduktionen um 1 €, $n_2 = 72{,}4 \approx 72$ Preisreduktionen um 1 €.
Stückpreise somit: $p_1 = 200 - 28 = 172$ €; $p_2 = 200 - 72 = 128$ €.
Zugehörige Stückzahlen: $x_1 = 500 + 5\cdot 28 = 640$ Stück; $x_2 = 500 + 5\cdot 72 = 860$ Stück.
Reduziert man also den Stückpreis auf 172 €, so erreicht man bei einer Verkaufszahl von 640 Stück (etwa) eine 10%–ige Umsatzsteigerung. Eine gleiche Umsatzsteigerung erreicht man auch, wenn man den Preis noch weiter, nämlich auf 128 € reduziert. Bei diesem geringeren Preis ist aber die Verkaufszahl höher, nämlich 860 Stück; dadurch bleibt der Umsatz wieder gleich.
Maximaler Umsatz: $E(n) = (200 - n)\cdot(500 + 5n) = -5n^2 + 500n + 100000 =$
$= -5\cdot(n^2 - 100n + 50^2 - 50^2) + 100000 = -5\cdot(n^2 - 50)^2 + 5\,50^2 + 100000 = -5\cdot(n^2 - 50)^2 + 112500 \Rightarrow$
Scheitel S(50/112500), d.h. maximaler Umsatz von 112500 € bei $n = 50$ Preisreduktionen um 1 €; d.h. bei $p = 150$ € und einer Stückzahl $x = 500 + 5\cdot 50 = 750$ Stück.

2. Lösungsvariante
Ermittlung der linearen Nachfragefunktion (Beispiel 3.9, Lehrbuch Seite 52 f.): $x = k\cdot p + d$;
$k = \Delta x/\Delta p = 5/(-1) = -5$; $x = 500$ bei $p = 200 \Rightarrow 500 = -5\cdot 20 + d$, daraus $d = 1500$.
Nachfragefunktion: $x = -5p + 1500$; Erlös (Umsatz) als Funktion von p: $E(p) = p\cdot x = -5p^2 + 1500p$.
$E(200) = -5\cdot 200^2 + 1500\cdot 200 = 100000$ €; $E(p) = 1{,}1\cdot 100000$? $-5p^2 + 1500\cdot p = 110000 \Rightarrow$
$p_1 = 127{,}64$ € oder $p_2 = 172{,}36$ €. Zugehörige Stückzahlen: $x_1 = -5\cdot p_1 + 1500 \approx 862$ Stück;
$x_2 = -5p_2 + 1500 \approx 638$ Stück. Die Abweichung zur 1. Lösungsvariante ergibt sich, weil dort nur mit ganzzahligen Preisen gerechnet wird.

3.95 Kostenfunktion $K(x) = 120 \cdot x + 1500$;
Nachfragefunktion $x = -0{,}2 \cdot p + 140 \Rightarrow p = 700 - 5x$
Erlösfunkt. $E(x) = p \cdot x = (700 - 5x) \cdot x = 700x - 5x^2$
Gewinnfunktion $G(x) = E(x) - K(x) = -5x^2 + 580x - 1500$.
Gewinngrenzen: $G(x) = 0 \Rightarrow$

$$x_{12} = \frac{-580 \pm \sqrt{580^2 - 4 \cdot (-5) \cdot (-1500)}}{2 \cdot (-5)} = \frac{-580 \pm 553{,}53}{-10}$$

$x_1 = 2{,}65$; $x_2 = 113{,}35$; d.h. Gewinn bei einem Verkauf von 3 bis 113 Stück.



Mindestgewinn 10000 €: $G(x) = 10000 \Rightarrow -5x^2 + 580x - 1500 = 10000$, $-5x^2 + 580x - 11500 = 0$
$x_1 = 25{,}38$ $x_2 = 90{,}61$; d.h. Mindestgewinn von 10000 € Gewinn bei einem Verkauf von 26 bis 90 Stück.
Scheitelform der Gewinnfunktion: $G(x) = -5x^2 + 580x - 1500 = -5(x^2 - 116x + 58^2 - 58^2) - 1500 = -5 \cdot (x - 58)^2 + 5 \cdot 58^2 - 1500 = -5 \cdot (x - 58)^2 + 15320$; $S(58/15320)$, d.h. maximaler Gewinn € 15320 bei 58 Stück.
Lösungsvariante für den maximalen Gewinn: Gewinnmaximale Stückzahl = halbe Summe der Gewinngrenzen = $\frac{1}{2} \cdot (2{,}65 + 113{,}35) = 58$; $G_{max} = -5 \cdot 58^2 + 580 \cdot 58 - 1500 = € \ 15320$.

3.96 n Spieler A, B, C, ... ; jeder dieser Personen spielt gegen die übrigen n–1 Personen; dies ergibt aber die doppelte Anzahl der Spiele, da dabei die Spiele A gegen B und auch B gegen A usw. erfasst werden. Somit ist die Anzahl der Spiele: $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$.
$\frac{n \cdot (n-1)}{2} = 28$, $n^2 - n - 56 = 0$; $n_{12} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 56} = 0{,}5 \pm 7{,}5$; $n_1 = 8$ (n_2 ist negativ); 8 Spieler nehmen am Turnier teil.

3.97 Bei x Mitarbeitern ist die Prämie pro Mitarbeiter gleich $\frac{4000}{x}$, bei x–2 Mitarbeitern $\frac{4000}{x-2}$:
$\frac{4000}{x-2} = \frac{4000}{x} + 100$; $100x^2 - 200x - 8000 = 0$; $x^2 - 2x - 80 = 0$; ${}_1x_2 = 1 \pm \sqrt{1 + 80} = 1 \pm 9$;
$x_1 = 10$ (x_2 ist negativ). Ursprünglich 10 Mitarbeiter, 8 Mitarbeiter erhalten eine Prämie in der Höhe von € 500

3.98 Bei x Schülern ist der Beitrag $\frac{720}{x}$, bei x+3 Schülern $\frac{720}{x+3}$: $\frac{720}{x+3} = \frac{720}{x} - 40$; $x^2 + 3x - 54 = 0$;
$x_{12} = -1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 54} = -1{,}5 \pm 7{,}5$; $x_1 = 6$ (x_2 ist negativ); $6 + 3 = 9$ Schüler nehmen teil.

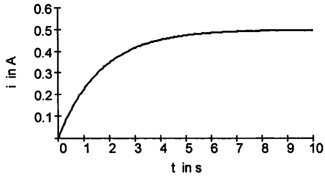
3.99 Ist x die tägliche Streumenge, so gibt es ursprünglich $\frac{480}{x}$ Streutage. Bei einer täglichen Streumenge von x –4 gibt es $\frac{480}{x-4}$ Streutage: $\frac{480}{x} + 10 = \frac{480}{x-4}$; $x^2 - 4x - 192 = 0$;
$x_{12} = 2 \pm \sqrt{4 + 1920} = 2 \pm 14$; $x_1 = 16$ (x_2 ist negativ). Die vorgesehene tägliche Streumenge ist 16 t.

3.100 Gruppe A: x+2 Personen; gesammelter Müll pro Person: $\frac{700}{x+2}$;
Gruppe B: x Personen; gesammelter Müll pro Person: $\frac{480}{x}$;
$\frac{700}{x+2} = \frac{480}{x} + 10$; $x^2 - 20x + 96 = 0$; $x_{12} = 10 \pm \sqrt{100 - 96} = 10 \pm 2$; $x_1 = 12$; $x_2 = 8$.
Zwei Lösungen:
Es waren 14 Personen in der Gruppe A und 12 Personen in der Gruppe B; sie sammelten 50 kg bzw. 40 kg pro Person.
Oder: 10 Personen in der Gruppe A und 8 Personen in der Gruppe B; sie sammelten 70 kg bzw. 60 kg pro Person

4 Exponentialfunktionen

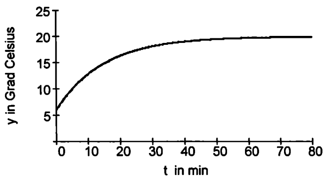
4.1 a)

t =	i(t) =
0	0.000
1	0.248
2	0.384
3	0.458
4	0.500
5	0.522
6	0.535
7	0.542
8	0.545
9	0.547
10	0.549



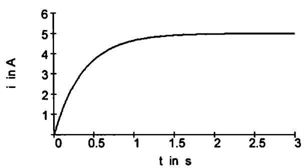
b) 0,35 A bzw. 0,44 A
c) Etwa 0,9 s bzw. 3,9 s

4.2 **a)**



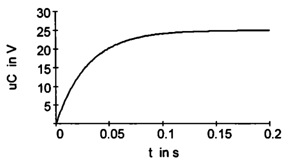
b) Etwa 8 min (genauer: 8,4 min)
c) $\vartheta(0) = 20 \cdot (1 - 0{,}7 \cdot e^0) = 6°C$

4.3 **a)**



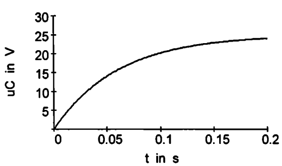
b) $\tau = 3/8 = 0{,}375\ s^{-1}$;
$i(3) = 5 \cdot (1 - e^{-1/0{,}375}) = 4{,}65$ s
c) $i(\tau)/I_0 = 1 - e^{-\tau/\tau} = 1 - e^{-1} = 0{,}632 = 63{,}2\%$
$i(3\tau)/I_0 = 1 - e^{-3\tau/\tau} = 1 - e^{-3} = 0{,}950 = 95{,}0\%$
$i(5\tau)/I_0 = 1 - e^{-5\tau/\tau} = 1 - e^{-5} = 0{,}993 = 99{,}3\%$
d) Etwa 0,9 s (genauer: 0,86 s)

4.4 **a)**

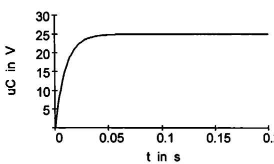


b) $\tau = 1000 \cdot 30 \cdot 10^{-6} = 0{,}03\ s^{-1}$;
$u_C(0{,}02) = 25 \cdot (1 - e^{-0{,}02/0{,}03}) = 12{,}2$ V
c) Etwa 0,02 s

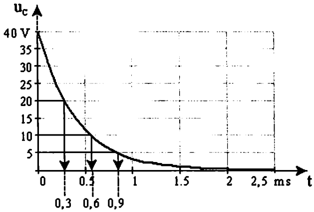
d)



e)



4.5 **a)**



b) Die Spannung halbiert sich – siehe nebenstehende Abbildung –
von 40 V auf 20 V,
von 20 V auf 10 V,
von 10 V auf 5 V
jeweils nach etwa 0,3 ms.
Die „Halbwertszeit" beträgt also etwa 0,3 ms.

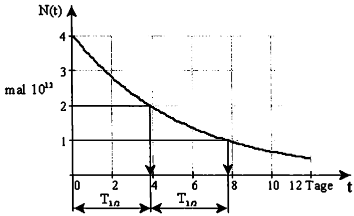
4.6 **a)** $t_0 = 2$ Tage $= 2 \cdot 24 \cdot 3600$ s;
$\lambda \cdot t_0 = 2{,}09 \cdot 10^{-6} \cdot 2 \cdot 24 \cdot 3600 = 0{,}3611$
$N(t_0) = 4 : 10^{12} \cdot e^{-0{,}3611} = 2{,}79 \cdot 10^{12}$ Kerne

b) Für die Graphik wählt man einfacher statt der Einheit „Sekunde" die Einheit „Tag":

$$\lambda = 2{,}09 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{s} = 2{,}09 \cdot 10^{-6}\,\frac{1}{\frac{1}{24 \cdot 3600}\,d} =$$

$$= 2{,}09 \cdot 10^{-6} \cdot 24 \cdot 3600\ d^{-1} = 0{,}1806\ d^{-1}.$$

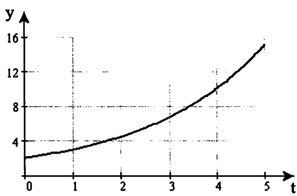
Man liest ab: $T_{1/2} \approx 3{,}8$ Tage



4.7 **a)** Bei gleicher Schrittweite Δt nimmt y stets um das gleiche Vielfache des jeweiligen Anfangswertes zu:

t	0	1	2	3	4	5
y	2	3	4,5	**6,75**	**10,125**	**15,1875**

Der Endwert bei jedem Schritt ist das $\frac{3}{2}$–fache des jeweiligen Anfangswertes. $4{,}5 \cdot \frac{3}{2} = 6{,}75$;
$6{,}75 \cdot \frac{3}{2} = 10{,}125$; $10{,}125 \cdot \frac{3}{2} = 15{,}1875$.

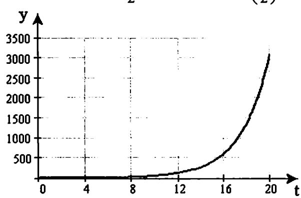


Expon. funkt. $y = c \cdot a^t$; $t = 0$: $2 = c \cdot a^0 = c$; $t = 1$: $3 = c \cdot a^1 = 2 \cdot a \Rightarrow a = \frac{3}{2}$. Daher: $y = 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t$

b)

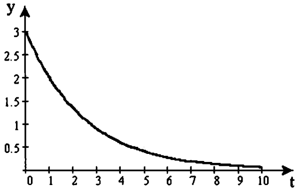
t	0	4	8	12	16	20
y	1	5	25	**125**	**625**	**3125**

Der Endwert bei jedem Schritt ist das 5–fache des jeweiligen Anfangswertes. $25 \cdot 5 = 125$;
$125 \cdot 5 = 625$; $625 \cdot 5 = 3125$.
Expon. funkt. $y = c \cdot a^t$; $t = 0$: $1 = c \cdot a^0 = c$;
$t = 1$: $5 = c \cdot a^1 = 1 \cdot a \Rightarrow a = 5$. Daher: $y = 5^{\frac{t}{4}}$.



4.8 **a)** Bei gleicher Schrittweite Δt nimmt y stets um das gleiche Vielfache des jeweiligen Anfangswertes ab:

t	0	1	2	3	4	5
y	3	2	4/3	**8/9**	**16/27**	**32/81**



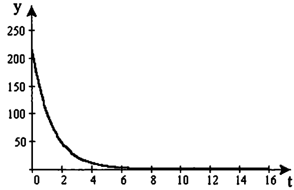
Der Endwert bei jedem Schritt ist das $\frac{2}{3}$–fache des jeweiligen Anfangswertes. $\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{9}$;

$\frac{8}{9}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{27}$; $\frac{16}{27}\cdot\frac{2}{3}=\frac{32}{81}$.

Expon. funkt. $y = c\cdot a^t$; $t = 0$: $3 = c\cdot a^0 = c$; $t = 1$: $2 = c\cdot a^1 = 3\cdot a \Rightarrow a = \frac{2}{3}$. Daher: $y = 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^t$

b)

t	1	4	7	10	13	16
y	100	10	1	**0,1**	**0,01**	**0,001**



Der Endwert bei jedem Schritt (hier ist $\Delta t = 3$) ist $\frac{1}{10}$ des jeweiligen Anfangswertes. $1\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{10}=0{,}1$;

$\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{100}=0{,}01$; $\frac{1}{100}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{1000}=0{,}001$.

Expon. funkt. $y = c\cdot a^t$;

$t = 1$: $100 = c\cdot a^1 = c\cdot a$; $t = 4$: $10 = c\cdot a^4 = c\cdot a\cdot a^3 = 100\cdot a^3$ oder $a^3 = \frac{1}{10} \Rightarrow a = 10^{-1/3}$.

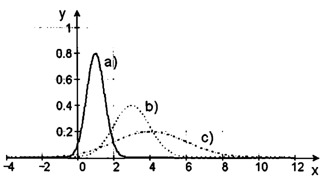
$c\cdot a = c\cdot 10^{-1/3} = 100 = 10^2 \Rightarrow c = 10^{2+1/3} = 10^{7/3}$ Daher: $y = 10^{\frac{7}{3}}\cdot\left(10^{-\frac{1}{3}}\right)^t = 10^{\frac{7}{3}-\frac{t}{3}} = 10^{\frac{7-t}{3}}$.

4.9 **a)** Der Endwert nach jeder Millisekunde ist ein Viertel des Anfangswertes (anfänglich 0,4 C auf 0,1 C, also auf ein Viertel); daher
nach 2 ms ein Viertel von 0,1 C, d.h. 0,0250 C,
nach 3 ms ein Viertel von 0,025 C, also 0,00625 C $\approx$ 0,0063 C,
nach 4 ms ein Viertel von 0,00625 C, also 0,0015625 C $\approx$ 0,0016 C

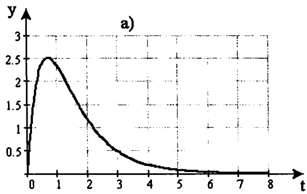
b) Der Endwert nach jeder Millisekunde ist um 0,3 C kleiner als der Anfangswertes (anfänglich 0,4 C auf 0,1 C); daher
nach 2 ms 0,1 C – 0,3 C = –0,2 C; nach 3 ms –0,2 C – 0,3 C = –0,5 C,
nach 4 ms –0,5 C – 0,3 C = –0,8 C.
Negative Ladungswerte in C sind nicht möglich, dies würde weniger als keine Ladung bedeuten.

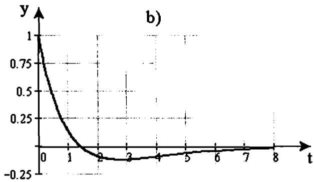
4.10 In jeder Woche sinkt die Anzahl der noch nicht zerfallenen Kerne auf die Hälfte. Daher ist nach 2 Wochen nur noch ein Viertel, nach drei Wochen ein Achtel, nach 4 Wochen ein Sechszehntel usw. der anfänglichen Kerne vorhanden, also $25\cdot 10^{10}$ Kerne, $125\cdot 10^9$ Kerne, $625\cdot 10^8$ Kerne, usw.

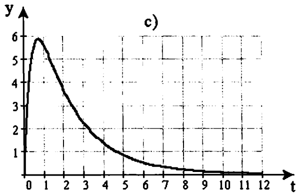
4.11



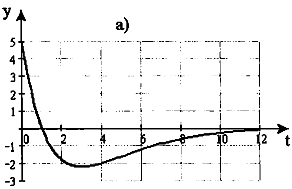
4.12

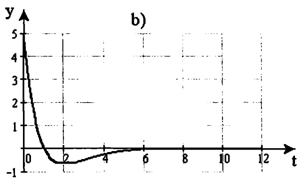


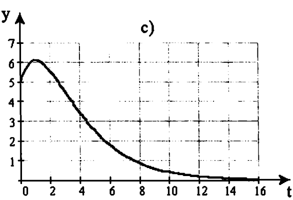


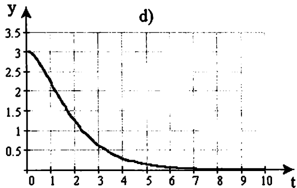


4.13

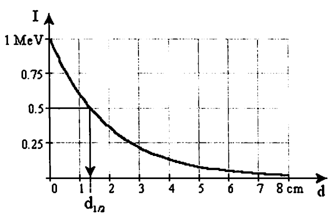








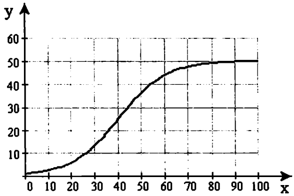
4.14 **a)**



b) d = 1 cm: $I_1 = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot 1} = 0{,}596 \cdot I_0$;
d = 2 cm: $I_2 = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot 2} = 0{,}355 \cdot I_0$;
$I_2/I_1 = 0{,}596 = 59{,}6\%$.
Die Intensität sinkt auf 59,6% des Wertes bei d = 1 cm.
Auch bei jedem weiteren Zentimeter Schichtstärke sinkt die Intensität auf 59,6% des jeweiligen Vorwertes.

c) Man liest ab (siehe Abbildung): $d_{1/2} \approx 1{,}3$ cm (genauer $d_{1/2} = 1{,}34$ cm)

4.15



y kommt mit wachsendem x dem Wert S („Sättigungsgrenze“) beliebig nahe, nähert sich asymptotisch der Geraden y = S.

4.16 **a)** $\log_3 27 = 3$ **b)** $\log_2 4 = 2$ **c)** $\lg 10000 = 4$ **d)** $\lg 1 = 0$

e) $\ln e = 1$ **f)** $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ **g)** $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$ **h)** $\log_{\frac{2}{3}} \frac{27}{8} = -3$

4.17 **a)** $4^3 = 64$ **b)** $2^{-3} = \frac{1}{8}$ **c)** $3^3 = 27$ **d)** $10^1 = 10$

e) $10^2 = 100$ **f)** $e^0 = 1$ **g)** $10^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ **h)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$

4.18 **a)** $x = \log_2 8 \Leftrightarrow 2^x = 8$, also $x = \log_2 8 = 3$
b) $x = \log_4 32 \Leftrightarrow 4^x = 32$ oder weiters $(2^2)^x = 2^{2x} = 2^5$, also $2x = 5$, $x = \log_4 32 = 2{,}5$
c) $x = \log_4 16 \Leftrightarrow 4^x = 16 = 4^2$, also $x = \log_4 16 = 2$
d) $x = \log_3 9 \Leftrightarrow 3^x = 9 = 3^2$, also $x = \log_3 9 = 2$
e) $x = \log_2 25 \Leftrightarrow 4^x = 16 = 4^2$, also $x = \log_2 25 = 2$
f) $x = \log_7 7 \Leftrightarrow 7^x = 7$, also $x = \log_7 7 = 1$
g) $x = \log_2 \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{4} = 2^{-2}$, also $x = \log_2 \frac{1}{4} = -2$
h) $x = \log_3 \frac{1}{81} \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{81} = 3^{-4}$, also $x = \log_3 \frac{1}{81} = -4$
i) $x = \log_2 \frac{1}{32} \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{32} = 2^{-5}$, also $x = \log_2 \frac{1}{32} = -5$
j) $x = \log_4 0{,}25 \Leftrightarrow 4^x = 0{,}25 = \frac{1}{4} = 4^{-1}$, also $x = \log_4 0{,}25 = -1$
k) $x = \log_3 \sqrt{3} \Leftrightarrow 3^x = \sqrt{3} = 3^{1/2}$, also $x = \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$
l) $x = \log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{\sqrt{2}} = 2^{-1/2}$, also $x = \log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$
m) $x = \log_5 \sqrt[3]{25} \Leftrightarrow 5^x = \sqrt[3]{25} = 5^{2/3}$, also $x = \log_5 \sqrt[3]{25} = \frac{2}{3}$
n) $x = \log_3 \sqrt{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow 3^x = \sqrt{\frac{1}{3}} = 3^{-1/2}$, also $x = \log_3 \sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{1}{2}$
o) $x = \log_{\frac{2}{3}} \frac{27}{8} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$, also $x = \log_{\frac{2}{3}} \frac{27}{8} = -3$

4.19 **a)** $x = \ln 1 \Leftrightarrow e^x = 1 = e^0$, also $x = \ln 1 = 0$
b) $x = \lg 10 \Leftrightarrow 10^x = 10 = 10^1$, also $x = \lg 10 = 1$
c) $x = \lg 1 \Leftrightarrow 10^x = 1 = 10^0$, also $x = \lg 1 = 0$
d) $x = \ln e \Leftrightarrow e^x = e = e^1$, also $x = \ln e = 1$
e) $x = 10^{\lg 3} \Leftrightarrow \lg 3 = \lg x$, also $x = 10^{\lg 3} = 3$
f) $u = e^{\ln x} \Leftrightarrow \ln x = \ln u$, also $u = e^{\ln x} = x$

4.19 **g)** $x = \ln\frac{1}{e} \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{e} = e^{-1}$, also $x = \ln\frac{1}{e} = -1$

h) $u = 10^{\lg x} \Leftrightarrow \lg x = \lg u$, also $u = 10^{\lg x} = x$

i) $x = \lg\frac{1}{10} \Leftrightarrow 10^x = \frac{1}{10} = 10^{-1}$, also $x = \lg\frac{1}{10} = -1$

j) $x = \lg 0{,}01 \Leftrightarrow 10^x = 0{,}01 = 10^{-2}$, also $x = \lg 0{,}01 = -2$

k) $x = \ln\sqrt{e} \Leftrightarrow e^x = \sqrt{e} = e^{1/2}$, also $x = \ln\sqrt{e} = \frac{1}{2}$

l) $x = \ln\sqrt{\frac{1}{e}} \Leftrightarrow e^x = \sqrt{\frac{1}{e}} = e^{-1/2}$, also $x = \ln\sqrt{\frac{1}{e}} = -\frac{1}{2}$

m) $x = \lg\sqrt[3]{100} \Leftrightarrow 10^x = \sqrt[3]{100} = 10^{2/3}$, also $x = \lg\sqrt[3]{100} = \frac{2}{3}$

n) $x = \lg\frac{1}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow 10^x = \frac{1}{\sqrt{10}} = 10^{-1/2}$, also $x = \lg\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{1}{2}$

o) $x = \lg\frac{\sqrt{10}}{\sqrt[3]{10}} \Leftrightarrow 10^x = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt[3]{10}} = 10^{1/2}\cdot 10^{-1/3} = 10^{1/6}$, also $x = \lg\frac{\sqrt{10}}{\sqrt[3]{10}} = \frac{1}{6}$

4.20 **a)** $u = \log_2 x \Leftrightarrow 2^u = x$:

$2^u = 1 = 2^0 \Rightarrow u = 0$; $2^u = 2 = 2^1 \Rightarrow u = 1$; $2^u = 4 \Rightarrow u = 2$;

$2^u = 8 \Rightarrow u = 3$; $2^u = \frac{1}{8} = 2^{-3} \Rightarrow u = -3$; $2^u = 0{,}25 = \frac{1}{4} = 2^{-2} \Rightarrow u = -2$;

$2^u = 0{,}0625 = \frac{1}{16} = 2^{-4} \Rightarrow u = -4$; $2^u = \sqrt{2} = 2^{1/2} \Rightarrow u = \frac{1}{2}$;

$2^u = \sqrt[3]{2} = 2^{1/3} \Rightarrow u = \frac{1}{3}$; $2^u = \sqrt[5]{4} = 2^{2/5} \Rightarrow u = \frac{2}{5}$; $2^u = \frac{1}{\sqrt[5]{2}} = 2^{-1/5} \Rightarrow u = -\frac{1}{5}$

b) $u = \lg x \Leftrightarrow 10^u = x$:

$10^u = 1 = 10^0 \Rightarrow u = 0$ $10^u = 10 = 10^1 \Rightarrow u = 1$ $10^u = 1000 = 10^3 \Rightarrow u = 3$;

$10^u = 0{,}1 = \frac{1}{10} = 10^{-1} \Rightarrow u = -1$; $10^u = 0{,}0001 = \frac{1}{10000} = 10^{-4} \Rightarrow u = -4$;

$10^u = \frac{1}{100} = 10^{-2} \Rightarrow u = -2$; $10^u = \sqrt{10} = 10^{1/2} \Rightarrow u = \frac{1}{2}$;

$10^u = \sqrt[3]{100} = 10^{2/3} \Rightarrow u = \frac{2}{3}$; $10^u = \frac{1}{\sqrt{10}} = 10^{-1/2} \Rightarrow u = -\frac{1}{2}$

4.21 **a)** $1 = \ln x \Leftrightarrow e^1 = x$, also $1 = \ln e$ **b)** $2 = \lg x \Leftrightarrow 10^2 = x$, also $2 = \lg 100$

c) $-1 = \lg x \Leftrightarrow 10^{-1} = x$, also $-1 = \lg 10^{-1} = \lg\frac{1}{10}$

d) $0 = \ln x \Leftrightarrow e^0 = x$ oder $1 = x$, also $0 = \ln 1$

e) $0 = \lg x \Leftrightarrow 10^0 = x$ oder $1 = x$, also $0 = \lg 1$

4.22 **a)** $\lg x = 2$; $x = 10^2 = 100$ **b)** $\ln x = -1$; $x = e^{-1} = 0{,}3679$

c) $\log_2 x = 4$; $x = 2^4 = 16$ **d)** $\log_3 x = 2$; $x = 3^2 = 9$

e) $\log_5 x = \frac{3}{2}$; $x = 5^{3/2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5} \approx 11{,}180$ **f)** $\ln x = -0{,}1$; $x = e^{-0{,}1} = \frac{1}{\sqrt[10]{e}} \approx 0{,}9048$

g) $\lg x = \frac{1}{2}$; $x = 10^{1/2} = \sqrt{10} \approx 3{,}162$ **h)** $\log_2 x = -4$; $x = 2^{-4} = \frac{1}{16}$

i) $\lg x = -\frac{1}{2}$; $x = 10^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 0{,}3162$ **j)** $\lg x = \frac{3}{4}$; $x = 10^{3/4} = \sqrt[4]{1000} \approx 5{,}623$

k) $\lg x = 2{,}8$; $x = 10^{2{,}8} = 10^{28/100} = 10^{14/5} = \sqrt[5]{10^{14}} = 10^2\cdot\sqrt[5]{10^4} = 100\cdot\sqrt[5]{10000} \approx 630{,}96$

l) $\log_3 x = 0{,}25$; $x = 3^{0{,}25} = 3^{1/4} = \sqrt[4]{3} \approx 1{,}3161$

4.23 **a)** $\ln(2a) = \ln 2 + \ln a$; Zahlenprobe mit a = 3: $\ln(2\cdot 3) = \ln 6 = 1{,}7918$;
$\ln 2 + \ln 3 = 0{,}6931 + 1{,}0986 = 1{,}7918$ (Abweichung rundungsbedingt)

b) $\ln\frac{2}{a} = \ln 2 - \ln a$; Zahlenprobe mit a = 3: $\ln\frac{2}{3} = -0{,}4055$; $\ln 2 - \ln 3 = 0{,}6931 - 1{,}0986 = -0{,}4055$

c) $\ln\frac{1}{x} = \ln 1 - \ln x = 0 - \ln x = -\ln x$; Zahlenprobe mit x = 2: $\ln\frac{1}{2} = -0{,}6931$; $-\ln 2 = -0{,}6931$

d) $\lg\frac{2a}{b} = \lg(2a) - \lg b = \lg 2 + \lg a - \lg b$;

Zahlenprobe mit a = 2, b = 4: $\lg\frac{2a}{b} = 0$; $\lg 2 + \lg a - \lg b = 0$

e) $\lg\frac{2}{a\cdot b} = \lg 2 - \lg(a\cdot b) = \lg 2 - [\lg a + \lg b] = \lg 2 - \lg a - \lg b$; Zahlenprobe mit a = 2, b = 3:

$\lg\frac{2}{a\cdot b} = -0{,}4771$; $\lg 2 - \lg a - \lg b = -0{,}4771$

f) $\ln(3a^2) = \ln 3 + \ln a^2 = \ln 3 + 2\cdot\ln a$;
Zahlenprobe mit a = 2: $\ln(3a^2) = 2{,}4849$; $\ln 3 + 2\cdot\ln a = 2{,}4849$

g) $\ln\frac{1}{a^3} = \ln 1 - \ln a^3 = 0 - 3\cdot\ln a = -3\cdot\ln a$;

Zahlenprobe mit a = 2: $\ln\frac{1}{a^3} = -2{,}0794$; $-3\cdot\ln a = -2{,}0794$

h) $\lg(2\sqrt{x}) = \lg 2 + \lg\sqrt{x} = \lg 2 + \lg x^{1/2} = \lg 2 + \frac{1}{2}\cdot\lg x$;

Zahlenprobe mit x = 4: $\lg(2\sqrt{x}) = 0{,}6021$; $\lg 2 + \frac{1}{2}\cdot\lg x = 0{,}6021$

i) $\ln\sqrt{2x} = \ln(2x)^{1/2} = \frac{1}{2}\cdot\ln(2x) = \frac{1}{2}\cdot[\ln 2 + \ln x] = \frac{1}{2}\cdot\ln 2 + \frac{1}{2}\cdot\ln x$;

Zahlenprobe mit x = 2: $\ln\sqrt{2x} = 0{,}6012$; $\frac{1}{2}\cdot\ln 2 + \frac{1}{2}\cdot\ln x = 0{,}6012$

j) $\ln\frac{2\cdot\sqrt[3]{t}}{3} = \ln\left(2\cdot\sqrt[3]{t}\right) - \ln 3 = \ln 2 + \ln\sqrt[3]{t} - \ln 3 = \ln 2 + \ln t^{1/3} - \ln 3 = \ln 2 + \frac{1}{3}\cdot\ln t - \ln 3$;

Zahlenprobe mit t = 2: $\ln\frac{2\cdot\sqrt[3]{t}}{3} = -0{,}1744$; $\ln 2 + \frac{1}{3}\cdot\ln t - \ln 3 = -0{,}1744$

4.24 **a)** $\lg\frac{a+b}{2} = \lg(a+b) - \lg 2$; Zahlenprobe: a = 1, b = 2: $\lg\frac{a+b}{2} = 0{,}1761$; $\lg(a+b) - \lg 2 = 0{,}1761$

b) $\ln\frac{1}{a+b} = \ln 1 - \ln(a+b) = 0 - \ln(a+b) = -\ln(a+b)$

c) $\ln\frac{a+b}{a^2-b^2} = \ln\frac{a+b}{(a+b)\cdot(a-b)} = \ln\frac{1}{a-b} = \ln 1 - \ln(a-b) = 0 - \ln(a-b) = -\ln(a-b)$

d) $\ln\frac{a\cdot b^2}{\sqrt{c}} = \ln(a\cdot b^2) - \ln\sqrt{c} = \ln a + \ln b^2 - \ln c^{1/2} = \ln a + 2\cdot\ln b - \frac{1}{2}\cdot\ln c$

e) $\ln\sqrt{\frac{2}{3b}} = \ln\left(\frac{2}{3b}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{2}{3b} = \frac{1}{2}\cdot[\ln 2 - \ln(3b)] = \frac{1}{2}\cdot[\ln 2 - (\ln 3 + \ln b)] = \frac{1}{2}\cdot[\ln 2 - \ln 3 - \ln b]$

f) $\lg\frac{(a+b)^2}{a^3\cdot\sqrt[4]{a}} = \lg(a+b)^2 - \lg\left(a^3\cdot\sqrt[4]{a}\right) = 2\cdot\lg(a+b) - \left[\lg a^3 + \lg a^{1/4}\right] = 2\cdot\lg(a+b) - \frac{13}{4}\cdot\lg a$

g) $\lg\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3}{s}}\right) = \lg\frac{1}{2} + \lg\sqrt{\frac{3}{s}} = \lg 1 - \lg 2 + \lg\left(\frac{3}{s}\right)^{1/2} = 0 - \lg 2 + \frac{1}{2}\cdot\lg\frac{3}{s} = -\lg 2 + \frac{1}{2}\cdot\lg 3 - \frac{1}{2}\cdot\lg s$

h) $\lg\left(\frac{10}{a}\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{2}}\right) = \lg 10 - \lg a + \frac{1}{3}\cdot(\lg a - \lg 2) = 1 - \lg a + \frac{1}{3}\cdot\lg a - \frac{1}{3}\cdot\lg 2 = 1 - \frac{2}{3}\cdot\lg a - \frac{1}{3}\cdot\lg 2$

4.24 **i)** $\lg\dfrac{\sqrt{x}\cdot y^2}{\sqrt[4]{y}\cdot(x-y)}=\frac{1}{2}\cdot\lg x+2\cdot\lg y-\frac{1}{4}\cdot\lg y-\lg(x-y)=\frac{1}{2}\cdot\lg x+\frac{7}{4}\cdot\lg y-\lg(x-y)$

j) $\ln\sqrt[3]{\dfrac{x-y}{(x-y)^{1/5}}}=\ln\sqrt[3]{(x-y)^{4/5}}=\frac{1}{3}\cdot\ln(x-y)^{4/5}=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ln(x-y)=\frac{4}{15}\cdot\ln(x-y)$

k) $\ln\sqrt[6]{\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{a/b}}{b^3}}=\frac{1}{6}\cdot\ln\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{a/b}}{b^3}\right)=\frac{1}{6}\cdot\left(0-\ln 3+\frac{1}{2}\cdot(\ln a-\ln b)-3\cdot\ln b\right)=$

$=\frac{1}{6}\cdot\left(-\ln 3+\frac{1}{2}\cdot\ln a-\frac{1}{2}\cdot\ln b-3\cdot\ln b\right)=-\frac{1}{6}\cdot\ln 3+\frac{1}{12}\cdot\ln a-\frac{7}{12}\cdot\ln b$

l) $\lg\left(a\cdot\sqrt{\dfrac{a\cdot b^2}{c\cdot\sqrt[3]{a}}}\right)=\lg a+\frac{1}{2}\cdot\left(\lg a+2\cdot\lg b-\lg c-\frac{1}{3}\cdot\lg a\right)=\frac{4}{3}\cdot\lg a+\lg b-\frac{1}{2}\cdot\lg c$

4.25 **a)** $\ln a+\ln(2a)=\ln(a\cdot 2a)=\ln(2a^2)$; Zahlenprobe mit $a=2$: $\ln a+\ln(2a)=2{,}8794$; $\ln(2a^2)=2{,}8794$

b) $-\ln a-\ln 2=0-(\ln a+\ln 2)=\ln 1-\ln(2a)=\ln\frac{1}{2a}$

c) $1+\ln 2-\ln 1=\ln e+\ln 2-0=\ln(2e)$

d) $2+\lg 3=\lg 100+\lg 3=\lg 300$

e) $-1+\lg 2=\lg 2-1=\lg 2-\lg 10=\lg\frac{2}{10}=\lg\frac{1}{5}$

f) $\lg\frac{m}{10}-\lg\frac{100}{m}=\lg\frac{m/10}{100/m}=\lg\frac{m^2}{1000}$

g) $\ln 2-\ln\frac{1}{2}=\ln\frac{2}{1/2}=\ln 4$

h) $\ln(x+y)-\ln\frac{x+y}{2}=\ln\frac{x+y}{(x+y)/2}=\ln 2$

i) $\lg x-3\cdot\lg x^2=\lg x-\lg x^6=\lg\frac{x}{x^6}=\lg\frac{1}{x^5}$

j) $\lg 2-\lg a+\lg b=\lg\frac{2}{a}+\lg b=\lg\frac{2b}{a}$

k) $\lg x-\lg 2-\lg(2x)=\lg x-[\lg 2+\lg(2x)]=\lg x-\lg(4x)=\lg\frac{x}{4x}=\lg\frac{1}{4}$

l) $\ln(2t)-2\ln\frac{t}{2}=\ln(2t)-\ln\left(\frac{t}{2}\right)^2=\ln(2t)-\ln\frac{t^2}{4}=\ln\frac{2t}{t^2/4}=\ln\frac{8}{t}$

4.26 **a)** $\lg x+\lg y-\frac{1}{2}\cdot\lg z=\lg(x\cdot y)-\lg z^{1/2}=\lg\frac{x\cdot y}{z^{1/2}}=\lg\frac{x\cdot y}{\sqrt{z}}$;

Zahlenprobe mit $x=2$, $y=3$, $z=4$: $\lg x+\lg y-\frac{1}{2}\cdot\lg z=0{,}4771$; $\lg\frac{x\cdot y}{\sqrt{z}}=0{,}4771$

b) $\ln a+\ln a^2+\ln\sqrt{a}=\ln a+\ln a^2+\ln a^{1/2}=\ln a+2\cdot\ln a+\frac{1}{2}\cdot\ln a=\frac{7}{2}\cdot\ln a=\ln\sqrt{a^7}$

c) $-\frac{1}{2}\cdot\ln a-\ln\frac{p}{2}=0-\frac{1}{2}\cdot\ln a-\ln\frac{p}{2}=\ln 1-\left[\ln\sqrt{a}+\ln\frac{p}{2}\right]=\ln\frac{1}{\sqrt{a}\cdot p/2}=\ln\frac{2}{p\cdot\sqrt{a}}$

d) $\ln b+3\cdot\ln b^2-3\cdot\ln\sqrt{b}=\ln b+6\cdot\ln b-\frac{3}{2}\cdot\ln b=\frac{11}{2}\cdot\ln b=\ln\sqrt{b^{11}}$

e) $\frac{1}{2}\cdot\ln a+\frac{1}{5}\cdot\ln b-\frac{1}{2}\cdot\ln c=\ln\sqrt{a}+\ln\sqrt[5]{b}-\ln\sqrt{c}=\ln\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[5]{b}}{\sqrt{c}}$

f) $\ln\frac{a+b}{a-b}+2\cdot\ln\sqrt{\frac{a-b}{2}}=\ln\frac{a+b}{a-b}+\ln\left(\sqrt{\frac{a-b}{2}}\right)^2=\ln\frac{a+b}{a-b}+\ln\frac{a-b}{2}=\ln\frac{(a+b)/(a-b)}{(a-b)/2}=\ln\frac{a+b}{2}$

g) $3-\frac{1}{2}\cdot\lg(x+2)=\lg 1000-\lg\sqrt{x+2}=\lg\frac{1000}{\sqrt{x+2}}$

h) $\frac{1}{3}\cdot[\ln x-\ln(2y)-2\cdot\ln 5]=\frac{1}{3}\cdot\left[\ln x-\ln(2y)-\ln 5^2\right]=\frac{1}{3}\cdot\ln\frac{x}{2y\cdot 25}=\ln\sqrt[3]{\frac{x}{50y}}$

i) $\ln\frac{x^2-1}{x}-\ln\frac{x+1}{2x}=\ln\frac{(x+1)\cdot(x-1)/x}{(x+1)/(2x)}=\ln[2\cdot(x-1)]$

4.27 **a)** $\ln\sqrt{2} = \ln 2^{1/2} = \frac{\ln 2}{2}$, richtig

b) $\ln e^x = x \cdot \ln e = x \cdot 1 = x$, richtig

c) falsch, $\frac{1}{2} \cdot \lg 3 = \lg\sqrt{3} \neq \sqrt{\lg 3}$

d) falsch im Allgemeinen, richtig nur für x = 1,5

e) falsch, $\ln\frac{1}{x^2} = \ln x^{-2} = -2 \cdot \ln x$

f) falsch, ln 1 = 0

g) falsch, $\lg 50 = \lg\frac{100}{2}$

h) $\ln 4 = \ln 2^2 = 2 \cdot \ln 2$, richtig

i) falsch, $\lg 9 = \lg 3^2 \neq (\lg 3)^2$

j) $\lg 3 + \lg 3 = 2 \cdot \lg 3 = \lg 3^2 = \lg 9$, richtig

k) falsch, $2 \cdot \lg 5 = \lg 5^2 \neq (\lg 5)^2$

l) $\lg\frac{1}{4} = \lg\frac{1}{2^2} = \lg 2^{-2} = -2 \cdot \lg 2$, richtig

4.28 **a)** $\log_2 45 = \frac{\ln 45}{\ln 2} = \frac{\lg 45}{\lg 2} = 5{,}492$

b) $\log_2 60 = \frac{\ln 60}{\ln 2} = \frac{\lg 60}{\lg 2} = 5{,}907$

c) $\log_2 100 = \frac{\ln 100}{\ln 2} = \frac{\lg 100}{\lg 2} = 6{,}644$

d) $\log_2 \frac{21}{16} = \frac{\ln(21/16)}{\ln 2} = \frac{\lg(21/16)}{\lg 2} = 0{,}392$

e) $\log_2 0{,}4 = \frac{\ln 0{,}4}{\ln 2} = \frac{\lg 0{,}4}{\lg 2} = -1{,}322$

f) $\log_3 2 = \frac{\ln 2}{\ln 3} = \frac{\lg 2}{\lg 3} = 0{,}631$

g) $\log_4 12 = \frac{\ln 12}{\ln 4} = \frac{\lg 12}{\lg 4} = 1{,}792$

h) $\log_5 2{,}8 = \frac{\ln 2{,}8}{\ln 5} = \frac{\lg 2{,}8}{\lg 5} = 0{,}640$

i) $\log_{12} 35{,}8 = \frac{\ln 35{,}8}{\ln 12} = \frac{\lg 35{,}8}{\lg 12} = 1{,}440$

j) $\log_3 (2e) = \frac{\ln(2e)}{\ln 3} = \frac{\lg(2e)}{\lg 3} = 1{,}541$

4.29

	a	b	10·lg(a/b)	G in dB
a)	2	1	3,010	3
b)	150	0,005	44,771	45
c)	2	50000	-43,979	-44
d)	$2{,}5 \cdot 10^8$	0,084	94,737	95
e)	0,038	$5 \cdot 10^{-10}$	78,555	79
f)	$4{,}4 \cdot 10^{-5}$	15000	-85,326	-85

4.30

	G in dB	lg(a/b)	a/b
a)	3	0,3	$10^{0,3} \approx 2$
b)	6	0,6	$10^{0,6} \approx 4$
c)	9	0,9	$10^{0,9} \approx 8$
d)	20	2	$10^2 = 100$
e)	100	10	10^{10}

	G in dB	lg(a/b)	a/b
f)	103	10,3	$10^{10,3} \approx 2 \cdot 10^{10}$
g)	0	0	$10^0 = 1$
h)	–3	–0,3	$10^{-0,3} \approx 0{,}5$
i)	–6	–0,6	$10^{-0,6} = 0{,}25$
j)	–20	–2	$10^{-2} = 0{,}01$

4.31 **a)** $G_P = 10 \cdot \lg\frac{P_2}{P_1} = 10 \cdot \lg\frac{5 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-9}} = 10 \cdot \lg(5 \cdot 10^6) = 66{,}99 \approx 67$ dB

b) $G_P = 10 \cdot \lg\frac{P_2}{P_1} = 3$; $\lg\frac{P_2}{P_1} = 0{,}3$; $\frac{P_2}{P_1} = 10^{0,3} = 1{,}995 \approx 2$, d.h. P_2 ist doppelt so hoch wie P_1

4.32

	P_2/P_1	$\lg(P_2/P_1)$	$10 \cdot \lg(P_2/P_1)$	G_P in dB
a)	2	0,3010	3,010	≈ 3
b)	4	0,6021	6,021	≈ 6
c)	8	0,9031	9,031	≈ 9
d)	16	1,2041	12,041	≈ 12
e)	10^8	8	80	80
f)	$2\ 10^8$	8,3010	83,010	≈ 83
g)	0,5	-0,3010	-3,010	≈ -3

4.33 $G_U = 20 \cdot \lg \frac{500\,U_1}{U_1} = 20 \cdot \lg 500 = 53{,}979 \approx 54$ dB

$G_U = 36\,\text{dB} = 20 \cdot \lg \frac{U_2}{U_1}$; $\lg \frac{U_2}{U_1} = \frac{36}{20} = 1{,}8$; $10^{\lg(U_2/U_1)} = 10^{1,8}$; $\frac{U_2}{U_1} = 10^{1,8} = 63{,}0957 \approx 63$

4.34 $G_I = 20 \cdot \lg \frac{I_2}{I_1} = 20 \cdot \lg \frac{0{,}5}{0{,}8} = -4{,}082 \approx -4\,\text{dB}$

4.35 **a)** $pH_{Essig} = -\lg(10^{-3}) = 3$ **b)** $pH = -\lg\,[H^+] \Rightarrow [H^+] = 10^{-pH} = 10^{-4}$

c) $10^{-(pH)} = [H^+]$ oder $10^{pH} = \frac{1}{[H^+]}$

4.36 **a)** $3^x = 81 = 3^4$; $x = 4$ **b)** $2^{x/2} = 4 = 2^2$; $x/2 = 2$; $x = 4$

c) $2^{-2x} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$; $-2x = -1$; $x = \frac{1}{2}$ **d)** $3^{x+2} = 9^x = (3^2)^x = 3^{2x}$; $x + 2 = 2x$; $x = 2$

e) $2^{x+1} = 0{,}5 = 2^{-1}$; $x+1 = -1$; $x = -2$

f) $4^x - 1 = \frac{2}{3}$; $4^x = \frac{5}{3}$; $\ln 4^x = \ln \frac{5}{3}$; $x \cdot \ln 4 = \ln \frac{5}{3}$; $x = \frac{\ln(5/3)}{\ln 4} = 0{,}368$

g) $3^x = 4$; $\ln 3^x = \ln 4$; $x \cdot \ln 3 = \ln 4$; $x = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1{,}262$

h) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-x} = 2$; $\ln\left(\frac{2}{3}\right)^{-x} = \ln 2$; $-x \cdot \ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln 2$; $x = -\frac{\ln 2}{\ln(2/3)} = 1{,}710$

i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \frac{2}{3}$; $\ln\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \ln \frac{2}{3}$; $(x+1) \cdot \ln \frac{1}{2} = \ln \frac{2}{3}$; $x = \frac{\ln(2/3)}{\ln(1/2)} - 1 = -0{,}415$

j) $0{,}4 \cdot 2^{0,5 \cdot x} = 0{,}9^x$; $\ln\left(0{,}4 \cdot 2^{0,5 \cdot x}\right) = \ln 0{,}9^x$; $\ln 0{,}4 + \ln 2^{0,5 \cdot x} = 0{,}9^x$; $\ln 0{,}4 + 0{,}5x \cdot \ln 2 = x \cdot \ln 0{,}9$;

$\ln 0{,}4 = x \cdot \ln 0{,}9 - 0{,}5 \cdot x \cdot \ln 2$; $x \cdot (\ln 0{,}9 - 0{,}5 \cdot \ln 2) = \ln 0{,}4$; $x = \frac{\ln 0{,}4}{\ln 0{,}9 - 0{,}5 \cdot \ln 2} = 2{,}027$

k) $2 \cdot 4^{-x} = 1$; $4^{-x} = \frac{1}{2}$; $\ln 4^{-x} = \ln \frac{1}{2}$; $-x \cdot \ln 4 = \ln \frac{1}{2}$; $x = -\frac{\ln(1/2)}{\ln 4} = 0{,}5$

Lösungsvariante: $2 \cdot 4^{-x} = 1$; $2^1 \cdot (2^2)^{-x} = 2^0$; $2^1 \cdot 2^{-2x} = 2^0$; $2^{1-2x} = 2^0$; $1 - 2x = 0$; $x = \frac{1}{2}$

l) $3{,}4^{x-1} = 2 \cdot 4{,}1^x$; $\ln 3{,}4^{x-1} = \ln(2 \cdot 4{,}1^x)$; $(x-1) \cdot \ln 3{,}4 = \ln 2 + \ln 4{,}1^x$;

$x \cdot \ln 3{,}4 - \ln 3{,}4 = \ln 2 + x \cdot \ln 4{,}1$; $x \cdot (\ln 3{,}4 - \ln 4{,}1) = \ln 2 + \ln 3{,}4$; $x = \frac{\ln 2 + \ln 3{,}4}{\ln 3{,}4 - \ln 4{,}1} = -10{,}239$

m) $\frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$; $\ln \frac{1}{2^x} = \ln\left(\frac{1}{3}\right)^x$; $\ln 1 - \ln 2^x = x \cdot \ln \frac{1}{3}$; $0 - x \cdot \ln 2 = x \cdot \ln \frac{1}{3}$; $x \cdot \left(\ln 2 + \ln \frac{1}{3}\right) = 0$; $x = 0$

Lösungsvariante: $\frac{1}{2^x} = \frac{1}{3^x}$; $3^x = 2^x$; $\frac{3^x}{2^x} = 1$; $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^0$; $x = 0$

n) $0{,}2^{1-x} = \left(\frac{3}{4}\right)^x \cdot 0{,}8^{-x}$; $\ln 0{,}2^{1-x} = \ln\left[\left(\frac{3}{4}\right)^x \cdot 0{,}8^{-x}\right]$; $\ln 0{,}2^{1-x} = \ln\left(\frac{3}{4}\right)^x + \ln 0{,}8^{-x}$;

$(1-x) \cdot \ln 0{,}2 = x \cdot \ln \frac{3}{4} - x \cdot \ln 0{,}8$; $\ln 0{,}2 = x \cdot \left(\ln 0{,}2 + \ln \frac{3}{4} - \ln 0{,}8\right)$; $x = 0{,}961$

o) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} = \left(\frac{340}{468}\right)^x$; $\ln\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1} = \ln\left(\frac{340}{468}\right)^x$; $(x-1) \cdot \ln \frac{1}{4} = x \cdot \ln \frac{340}{468}$; $x = \frac{\ln(1/4)}{\ln(1/4) - \ln(340/468)} = 1{,}300$

p) $\frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-2x} = \left(\frac{1}{8}\right)^{1-x}$; $\frac{2}{5} \cdot 10^{2x} = 8^{x-1}$; $\ln\left(\frac{2}{5} \cdot 10^{2x}\right) = \ln 8^{x-1}$; $\ln\left(\frac{2}{5}\right) + 2x \cdot \ln 10 = (x-1) \cdot \ln 8$;

$x \cdot (2 \cdot \ln 10 - \ln 8) = -\ln \frac{2}{5} - \ln 8$; $x = \frac{-\ln(2/5) - \ln 8}{\ln 100 - \ln 8} = -0{,}461$

4.37 **a)** $e^{0,3\cdot x}=4;\ \ln e^{0,3\cdot x}=\ln 4;\quad 0,3\cdot x=\ln 4;\ x=\dfrac{\ln 4}{0,3}=4,621$

b) $1-e^{-3t}=0,5;\ 0,5=e^{-3t};\ \ln 0,5=\ln e^{-3t};\ \ln 0,5=-3t\cdot\ln e;\ \ln 0,5=-3t;\ t=-\dfrac{\ln 0,5}{3}=0,231$

c) $e^{x+1}=2\cdot e^{x-1};\ \ln e^{x+1}=\ln(2\cdot e^{x-1});\ \ln e^{x+1}=\ln 2+\ln e^{x-1};\ (x+1)\ln e=\ln 2+(x-1)\cdot\ln e;$
$x+1=\ln 2+x-1;\ 2=\ln 2$ nicht möglich, daher keine Lösung: L = { }

d) $1-0,4\cdot e^{-t/5}=0,8;\ 0,2=0,4\cdot e^{-t/5};\ 0,5=e^{-t/5};\ \ln 0,5=\ln e^{-t/5};\ \ln 0,5=-\dfrac{t}{5};\ t=-5\cdot\ln 0,5=3,466$

e) $\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=0,8;\ 1-e^{-2x}=0,8+0,8\cdot e^{-2x};\ 0,2=1,8\cdot e^{-2x};\ e^{-2x}=\dfrac{1}{9};\ \ln e^{-2x}=\ln\dfrac{1}{9};$

$-2x\cdot\ln e=\ln 1-\ln 9;\ -2x=0-\ln 9;\ x=\dfrac{1}{2}\cdot\ln 9=1,099$

f) $e^{-\left(\frac{t}{10}\right)^2}=0,9;\ \ln e^{-\left(\frac{t}{10}\right)^2}=\ln 0,9;\ \ln e^{-\left(\frac{t}{10}\right)^2}=\ln 0,9;\ -\left(\dfrac{t}{10}\right)^2\ln e=\ln 0,9;\ -\left(\dfrac{t}{10}\right)^2=\ln 0,9;$

$\dfrac{t}{10}=\pm\sqrt{-\ln 0,9};\ t=\pm 10\cdot\sqrt{-\ln 0,9};\quad t_1=3,246;\quad t_2=-3,246$

g) $1-\dfrac{1}{2}\cdot e^{-\frac{t}{2}}=0,7;\ 0,3=\dfrac{1}{2}\cdot e^{-\frac{t}{2}};\ 0,6=e^{-\frac{t}{2}};\ \ln 0,6=\ln e^{-\frac{t}{2}};\ \ln 0,6=-\dfrac{t}{2}\cdot\ln e;\ \ln 0,6=-\dfrac{t}{2};$
$t=-2\cdot\ln 0,6=1,022$

h) $e^{-\left(\frac{t}{100}\right)^3}=0,5;\ \ln e^{-\left(\frac{t}{100}\right)^3}=\ln 0,5;\ -\left(\dfrac{t}{100}\right)^3\ln e=\ln 0,5;\ -\left(\dfrac{t}{100}\right)^3=\ln 0,5;\ \dfrac{t}{100}=\sqrt[3]{-\ln 0,5}$

$t=100\cdot\sqrt[3]{-\ln 0,5}=88,500$

4.38 **a)** $2^{x+1}+2^x=4;\ 2^x\cdot(2+1)=4;\ 2^x=\dfrac{4}{3};\ \ln 2^x=\ln\dfrac{4}{3};\ x\cdot\ln 2=\ln\dfrac{4}{3};\ x=\dfrac{\ln(4/3)}{\ln 2}=0,415$

b) $6=3^{x-1}+2\cdot 3^{x-3};\ 6=3^{x-3}\cdot(3^2+2);\ 3^{x-3}=\dfrac{6}{11};\ (x-3)\cdot\ln 3=\ln\dfrac{6}{11};\ x-3=\dfrac{\ln(6/11)}{\ln 3};x=2,448$

c) $4^x+2^{2x+1}=3^x-3^{x-4};\ (2^2)^x+2^{2x+1}=3^x-3^{x-4};\ 2^{2x}+2^{2x+1}=3^x-3^{x-4};$
$2^{2x}\cdot(1+2)=3^{x-4}\cdot(3^4-1);\ 2^{2x}\cdot 3=3^{x-4}\cdot 80;\ 2^{2x}=80\cdot 3^{x-5};\ \ln 2^{2x}=\ln(80\cdot 3^{x-5});$
$2x\cdot\ln 2=\ln 80+(x-5)\cdot\ln 3;\ 2x\cdot\ln 2=\ln 80+x\cdot\ln 3-5\cdot\ln 3;\ x\cdot(2\cdot\ln 2-\ln 3)=\ln 80-5\cdot\ln 3$
$x=\dfrac{\ln 80-5\cdot\ln 3}{2\cdot\ln 2-\ln 3}=-3,862$

d) $5^x+5^{x-2}=3^{2x}-9^x;\ 5^x+5^{x-2}=(3^2)^x-3^{2x};\ 5^x+5^{x-2}=3^{2x}-3^{2x};\ 5^{x-2}\cdot(1+5^2)=0;\ 26\cdot 5^{x-2}=0;$

$26\cdot\dfrac{5^x}{5^2}=\dfrac{26}{25}\cdot 5^x=0$; da die Potenz 5^x für alle x stets positiv und damit ungleich null ist, ist diese Gleichung nicht lösbar: L = { }

4.39 $e^x=u$ und damit $x=\ln u$

a) $\dfrac{1}{2}\cdot(e^x-e^{-x})=3;\ u-\dfrac{1}{u}=6;\ u^2-6u-1=0;u_{12}=3\pm\sqrt{9+1};\ u_1=3+\sqrt{10};\ x_1=\ln u_1=1,818;$

$u_2=3-\sqrt{10}=-0,16228;$ $x_2=\ln u_2$ nicht möglich, da u_2 positiv sein müsste!

Hinweis: Der Term $\dfrac{1}{2}\cdot(e^x-e^{-x})$ wird als sinh x („Sinushyperbolikus von x") bezeichnet.

b) $\dfrac{1}{2}\cdot(e^x+e^{-x})=3;\ u+\dfrac{1}{u}=6\quad u^2-6u+1=0;\ u_{12}=3\pm\sqrt{9-1};\quad u_1=3+\sqrt{8};\ x_1=\ln u_1=1,763;$

$u_2=3-\sqrt{8};\ x_2=\ln u_2=-1,763.$

Hinweis: Der Term $\dfrac{1}{2}\cdot(e^x+e^{-x})$ wird als cosh x („Kosinushyperbolikus von x") bezeichnet.

4.40 **a)** $3^x + 2\cdot 3^{2x} = 21,\ 3^x = u;\ \ u + 2u^2 = 21;\ \ 2u^2 + u - 21 = 0;\ \ u_{12} = \frac{-1\pm\sqrt{1+168}}{4} = \frac{-1\pm 13}{4};$

$u_1 = 3;\ 3^{x_1} = 3;\ x_1 = 1;$ u_2 ist negativ, 3^x ist aber stets positiv. Daher nur $x_1 = 1$ Lösung: $L = \{1\}$

b) $2^{-x} + 3\cdot 2^x = 12{,}25,\ 2^x = u;\ \ \frac{1}{u} + 3u = 12{,}25;\ \ 3u^2 - 12{,}25u + 1 = 0;\ \ u_{12} = \frac{12{,}25\pm 11{,}75}{6};$

$u_1 = 4;\ 2^{x_1} = 4 = 2^2;\ x_1 = 2;\ u_2 = \frac{1}{12};\ \ 2^{x_2} = \frac{1}{12};\ \ x_2 = \frac{\ln(1/12)}{\ln 2} = -3{,}585$

4.41 **a)** $e^{-t/T} = 0{,}5;\ \ \ln e^{-t/T} = \ln 0{,}5;\ \ -\frac{t}{T} = \ln 0{,}5;\ \ t = -T\cdot\ln 0{,}5 = 0{,}693\cdot T$

b) $e^{-\frac{R}{L}\cdot t} = 0{,}8;\ \ \ln e^{-\frac{R}{L}\cdot t} = \ln 0{,}8;\ \ -\frac{R}{L}\cdot t = \ln 0{,}8;\ \ t = -\frac{L}{R}\cdot\ln 0{,}8 = 0{,}223\cdot\frac{L}{R}$

c) $m = 1 - e^{-2t};\ \ e^{-2t} = 1 - m;\ \ \ln e^{-2t} = \ln(1-m);\ \ -2t = \ln(1-m);\ \ t = -\frac{1}{2}\cdot\ln(1-m)$

d) $a = 3\cdot e^{-\lambda\cdot t};\ \ e^{-\lambda\cdot t} = \frac{a}{3};\ \ \ln e^{-\lambda\cdot t} = \ln\frac{a}{3};\ \ -\lambda\cdot t = \ln\frac{a}{3};\ \ -\lambda\cdot t = \ln a - \ln 3;\ \ t = \frac{\ln 3 - \ln a}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\cdot\ln\frac{3}{a}$

e) $h = 50\cdot 0{,}9^t;\ \ 0{,}9^t = \frac{h}{50};\ \ \ln 0{,}9^t = \ln\frac{h}{50};\ \ t\cdot\ln 0{,}9 = \ln\frac{h}{50};\ \ t = \frac{1}{\ln 0{,}9}\cdot\ln\frac{h}{50} = \frac{\ln h - \ln 50}{\ln 0{,}9}$

4.42 **a)** $\lg x = 3$, definiert für $x > 0$; $10^{\lg x} = 10^3$; $x = 1000$

b) $9\ln x = \frac{1}{2}$, definiert für $x > 0$; $e^{\ln x} = e^{1/2}$; $x = \sqrt{e} = 1{,}649$

c) $\ln x = 1$, definiert für $x > 0$; $e^{\ln x} = e^1$; $x = e = 2{,}718$

d) $\lg(x-3) = 5$, definiert für $x > 3$; $10^{\lg(x-3)} = 10^5$; $x - 3 = 10^5$; $x = 10^5 + 3 = 10\,003$

e) $\lg x = -2$, definiert für $x > 0$; $10^{\lg x} = 10^{-2}$; $x = 10^{-2} = 0{,}01$

f) $\lg\frac{1}{x} = 3$, definiert für $x > 0$; $10^{\lg\frac{1}{x}} = 10^3$; $\frac{1}{x} = 10^3$; $x = 10^{-3} = 0{,}001$

g) $\lg(2x+1) = 0{,}4$; definiert für $x > -\frac{1}{2}$; $10^{\lg(2x+1)} = 10^{0{,}4}$; $2x + 1 = 10^{0{,}4}$; $x = \frac{10^{0{,}4} - 1}{2} = 0{,}756$

h) $\ln(x+3) = -1$, definiert für $x > -3$; $e^{\ln(x+3)} = e^{-1}$; $x + 3 = e^{-1}$; $x = e^{-1} - 3 = -2{,}632$

i) $2\cdot\lg x = \frac{1}{4}$, definiert für $x > 0$; $\lg x = \frac{1}{8}$; $10^{\lg x} = 10^{1/8}$; $x = 10^{1/8} = \sqrt[8]{10} = 1{,}334$

j) $2\cdot\ln\frac{1}{x} = \frac{3}{4}$, definiert für $x > 0$; $\ln\frac{1}{x} = \frac{3}{8}$; $e^{\ln(1/x)} = e^{3/8}$; $\frac{1}{x} = e^{3/8}$; $x = e^{-3/8} = \frac{1}{\sqrt[8]{e^3}} = 0{,}687$

k) $\ln\frac{2x}{x+1} = 3{,}1;\ \ e^{2x/(x+1)} = e^{3{,}1};\ \ \frac{2x}{x+1} = e^{3{,}1};\ \ 2x = x\cdot e^{3{,}1} + e^{3{,}1};\ \ x\cdot\left(2 - e^{3{,}1}\right) = e^{3{,}1};\ x = -1{,}099;$

$\ln\frac{2x}{x+1}$ ist für x $-1{,}099$ definiert, daher Lösung

l) $\lg\frac{2x+1}{x-1} = 0;\ \ 10^{\lg\frac{2x+1}{x-1}} = 10^0;\ \ \frac{2x+1}{x-1} = 1;\ \ x = -2$ ist Lösung, da $\lg\frac{2x+1}{x-1}$ ist für $x = -2$ definiert ist

4.43 **a)** $\lg x + \lg 5 = 2$; Def. menge D: $x > 0$; $\lg(5x) = 2$; $10^{\lg(5x)} = 10^2$; $5x = 100$; $x = 20$.
Lösungsvariante: $\lg x + \lg 5 = \lg 100$; $\lg(5x) = \lg 100$; $5x = 100$; $x = 20$. Analog auch bei weiteren Aufgaben, insbesondere mit dem Zehnerlogarithmus.

b) $\lg(2x) = 2\cdot\lg x$; Def. menge D: $x > 0$; $\lg(2x) = \lg x^2$; $2x = x^2$; $x^2 - 2x = 0$; $x\cdot(2-x) = 0$;
Produkt – Null – Satz $\Rightarrow$ $x = 0$ sowie $2 - x = 0$, d .h. $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. $x_1 = 0$ ist keine Lösung, da nicht in D. $L = \{\ 2\ \}$

c) $1 + \lg(x-1) = \lg(2x)$; Def. menge D: $x > 1$ und $x > 0$ $\Rightarrow$ $x > 1$; $\lg 10 + \lg(x-1) = \lg(2x)$;
$\lg[10\cdot(x-1)] = \lg(2x)$; $10^{\lg[10\cdot(x-1)]} = 10^{\lg(2x)}$; $10\cdot(x-1) = 2x$; $x = 5/4$

d) $\ln(x-2) = \ln(x+3)$; Def. menge D: $x > 2$ und $x > -3 \Rightarrow x > 2$; $e^{\ln(x-2)} = e^{\ln(x+3)}$; $x - 2 = x + 3$;
$x = x + 5$; es gibt keine Zahl, die gleichbleibt, wenn man 5 dazu zählt, keine Lösung. $L = \{\ \}$

4.43 **e)** $\ln(x+1) - 2 = \ln x$; Def. menge D: $x > -1$ und $x > 0 \Rightarrow x > 0$; $\ln(x+1) - \ln x = 2$; $\ln\frac{x+1}{x} = 2$;

$e^{\ln((x+1)/x)} = e^2$; $\frac{x+1}{x} = e^2$; $x = \frac{1}{e^2-1} = 0{,}157$

f) $\lg(2x+1) - \lg x = 0{,}8$; Def. menge D: $x > -1/2$ und $x > 0 \Rightarrow x > 0$; $\lg\frac{2x+1}{x} = 0{,}8$;

$10^{\lg((2x+1)/x)} = 10^{0{,}8}$; $\frac{2x+1}{x} = 10^{0{,}8}$; $x = \frac{1}{10^{0{,}8}-1} = 0{,}232$

g) $\ln(3x+1) - 1 = 2\cdot\ln x$; Def. menge D: $x > -1/3$ und $x > 0 \Rightarrow x > 0$; $\ln(3x+1) - \ln x^2 = 1$;

$\ln\frac{3x+1}{x^2} = 1$; $e^{\ln((3x+1)/x^2)} = e^1$; $\frac{3x+1}{x^2} = e$; $e\cdot x^2 - 3\cdot x - 1 = 0$; $x_{12} = \frac{3\pm\sqrt{9+4e}}{2e}$; $x_1 = 1{,}372$;

$x_2 = -0{,}268$ nicht in D; L = { 1,372}

h) $1 - \ln\frac{x}{e} = \ln\frac{x}{2}$; Def. menge D: $x > 0$; $1 = \ln\frac{x}{e} + \ln\frac{x}{2}$; $1 = \ln\frac{x^2}{2e}$; $e^1 = e^{[x^2/(2e)]}$; $e = \frac{x^2}{2e}$;

$x^2 = 2\cdot e^2$; $x_1 = e\cdot\sqrt{2} = 3{,}844$; $x_2 = -e\cdot\sqrt{2} = -3{,}844$ nicht in D; L = { 3,844 }

i) $\lg x + 1 = \lg\sqrt{x}$; Def. menge D: $x > 0$ und $x \geq 0 \Rightarrow x > 0$; $\lg x + \lg 10 = \lg\sqrt{x}$;

$\lg(10\cdot x) = \lg\sqrt{x}$; $10^{\lg(10x)} = 10^{\lg\sqrt{x}}$; $10\cdot x = \sqrt{x}$; $100\cdot x^2 = x$; $x\cdot(1 - 100\cdot x) = 0$;

Produkt – Null – Satz $\Rightarrow x_1 = 0$, nicht in D; $x_2 = 0{,}01$; L = { 0,01}

4.44 **a)** $\lg(1-x) - 2\cdot\lg x = -1$; Def. menge D: $x < 1$ und $x > 0$; $\lg(1-x) - \lg x^2 = -1$;

$\lg\frac{1-x}{x^2} = -1$; $10^{\lg((1-x)/x^2)} = 10^{-1}$; $\frac{1-x}{x^2} = \frac{1}{10}$; $x^2 = 10 - 10x$; $x^2 + 10x - 10 = 0$;

$x_1 = 0{,}916$; $x_2 = -10{,}916$ nicht in D; L = { 0,916}

b) $\ln(x^2-4) - \ln(x-2) = 0$; Def. menge D: $x^2 > 4$ und $x > 2 \Rightarrow x > 2$; $x = -1$

$\ln\frac{x^2-4}{x-2} = 0$; $\ln(x+2) = 0$; $e^{\ln(x+2)} = e^0$; $x+2 = 1$; $x = -1$, nicht in D, keine Lösung: L = {}

c) $\ln x = 2 + \ln(1-x)$; Def. menge: D: $x > 0$ und $x < 1$; $\ln x = 2 + \ln(1-x)$; $\ln x - \ln(1-x) = 2$;

$\ln\frac{x}{1-x} = 2$; $e^{\ln[x/(1-x)]} = e^2$; $\frac{x}{1-x} = e^2$; $x = e^2 - x\cdot e^2$; $x\cdot(e^2+1) = e^2$; $x = \frac{e^2}{e^2+1} = 0{,}881$

d) $2\cdot\ln(x+2) = \ln(x+4)$; Def. menge D: $x > -2$ und $x > -4 \Rightarrow x > -2$; $\ln(x+2)^2 = \ln(x+4)$;

$\frac{(x+2)^2}{x+4} = 1$; $x^2 + 4x + 4 = x + 4$; $x^2 + 3x = 0$; $x\cdot(x+3) = 0$; Produkt – Null – Satz $\Rightarrow$

$x_1 = 0$; $x_2 = -3$ nicht in D. L = { 0 }

e) $1 + \ln x = \ln(x+1)$; Def. menge D: $x > 0$ und $x > -1 \Rightarrow x > 0$;

$\ln(x+1) - \ln x = 1$; $\ln\frac{x+1}{x} = 1$; $e^{\ln((x+1)/x)} = e^1$; $\frac{x+1}{x} = e$; $x + 1 = e\cdot x$; $x = \frac{1}{e-1} = 0{,}582$.

Lösungsvariante: $\ln e + \ln x = \ln(x+1)$; $\ln(e\cdot x) = \ln(x+1)$; $e\cdot x = x + 1$ usw.

f) $\ln(2x-1) - 2\cdot\ln x = 1$; Def. menge D: $x > 1/2$ und $x > 0 \Rightarrow x > 1/2$;

$\ln(2x-1) - \ln x^2 = 1$; $\ln\frac{2x-1}{x^2} = 1$; $e^{\ln[(2x-1)/x^2]} = e^1$; $\frac{2x-1}{x^2} = e$; $e\cdot x^2 - 2x + 1 = 0$;

$x_{12} = \frac{2\pm\sqrt{4-4e}}{2e}$; keine (reelle) Lösung, da $4 - 4e < 0$; L = { }

g) $\ln(4x-1) - 2\cdot\ln x = 1$; Def. menge D: $x > 1/4$ und $x > 0 \Rightarrow x > 1/4$;

$\ln(4x-1) - \ln x^2 = 1$; $\ln\frac{4x-1}{x^2} = 1$; $e^{\ln[(4x-1)/x^2]} = e^1$; $\frac{4x-1}{x^2} = e$; $4x - 1 = e\cdot x^2$;

$e\cdot x^2 - 4x + 1 = 0$; $x_{12} = \frac{4\pm\sqrt{16-4e}}{2e}$; $x_1 = 1{,}152$; $x_2 = 0{,}319$

4.44 **h)** $\ln x^2 + \ln x = 1{,}5$; Def. menge D: $x > 0$; $\ln x^3 = 1{,}5$; $e^{\ln x^3} = e^{1,5}$; $x^3 = e^{1,5} = e^{3/2}$; $x = e^{1/2} = \sqrt{e} = 1{,}649$

i) $\lg\frac{x}{2} + \lg\left(1-\frac{x}{2}\right) = -1$; Def. menge D: $x > 0$ und $1-x/2 > 0 \Rightarrow x > 0$ und $x < 2$:

$\lg\left[\frac{x}{2}\cdot\left(1-\frac{x}{2}\right)\right] = -1$; $10^{\lg[(x/2)(1-x/2)]} = 10^{-1}$; $\frac{x}{2}\cdot\left(1-\frac{x}{2}\right) = 10^{-1} = 0{,}1$; $\frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} = 0{,}1$;

$x^2 - 2x + 0{,}4 = 0$; $x_{12} = 1 \pm \sqrt{1-0{,}4}$; $x_1 = 1{,}775$; $x_2 = 0{,}225$

j) $\lg(x-3) + 2\cdot\lg(x+2) = 3\cdot\lg(x+1)$; Def. menge D: $x > 3$ und $x > -2$ und $x > -1 \Rightarrow x > 3$;

$\lg(x-3) + \lg(x+2)^2 - \lg(x+1)^3 = 0$; $\lg\frac{(x-3)\cdot(x+2)^2}{(x+1)^3} = 0$; $10^{\lg\left[(x-3)\cdot(x+2)^2/(x+3)^3\right]} = 10^0$;

$\frac{(x-3)\cdot(x+2)^2}{(x+1)^3} = 1$; $(x-3)\cdot(x^2+4x+4) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$; $2x^2 + 11x + 13 = 0$;

$x_{12} = \frac{-11 \pm \sqrt{121-104}}{4}$; $x_1 = -1{,}719$ sowie $x_2 = -3{,}781$ nicht in D, daher keine Lösungen: $L = \{\ \}$

k) $\ln(x+3) - \ln x = 5$; Def. menge D: $x > -3$ und $x > 0 \Rightarrow x > 0$; $\ln\frac{x+3}{x} = 5$; $e^{\ln[(x+3)/x]} = e^5$;

$\frac{x+3}{x} = e^5$; $x + 3 = e^5\cdot x$; $x = \frac{3}{e^5 - 1} = 0{,}0204$

l) $\lg(x+2) + \lg(x-2) = 4\cdot\lg x$; Def. menge D: $x > -2$ und $x > 2$ und $x > 0 \Rightarrow x > 2$;

$\lg[(x+2)\cdot(x-2)] = \lg x^4$; $\lg(x^2-4) = \lg x^4$; $10^{\lg(x^2-4)} = 10^{\lg x^4}$; $x^2 - 4 = x^4$; Substitution $u = x^2$;

$u^2 - u + 4 = 0$; $u_{12} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 4}$; keine (reelle) Lösung für u und in der Folge auch nicht für x;

$L = \{\ \}$

4.45 **a)** $x^{\lg x} = 3$, definiert für $x > 0$; $\lg x^{\lg x} = \lg 3$; $(\lg x)^2 = \lg 3$; $\lg x = \pm\sqrt{\lg 3} = \pm\, 0{,}6907$;
Umschreiben in eine Exponentialgleichung: $x_1 = 10^{0,6907} = 4{,}906$; $x_2 = 10^{-0,6907} = 0{,}204$

b) $x^{\ln x} = 2$, definiert für $x > 0$; $\ln x^{\ln x} = \ln 2$; $(\ln x)^2 = \ln 2$; $\ln x = \pm\sqrt{\ln 2} = \pm\, 0{,}8326$;
Umschreiben in eine Exponentialgleichung: $x_1 = e^{0,8326} = 2{,}299$; $x_2 = e^{-0,8326} = 0{,}435$

c) $2^{1+\lg x} = 4$, definiert für $x > 0$; $2^{1+\lg x} = 2^2$; $1 + \lg x = 2$; $\lg x = 1$; $10^{\lg x} = 10^1$; $x = 10$

d) $3\cdot 5^{\lg x} = 0{,}6$, definiert für $x > 0$; $5^{\lg x} = 0{,}2 = \frac{1}{5} = 5^{-1}$; $\lg x = -1$; $10^{\lg x} = 10^{-1}$; $x = -\frac{1}{10} = -\,0{,}1$

4.46 **a)** $\ln\frac{a}{p} = 2$; $e^{\ln(a/p)} = e^2$; $\frac{a}{p} = e^2$; $p = \frac{a}{e^2}$

b) $\lg\frac{I}{I_0} = 3$; $10^{(I/I_0)} = 10^3$; $\frac{I}{I_0} = 10^3 = 1000$; $I = 1000\cdot I_0$

c) $\lg\frac{I}{I_0} = -2$; $10^{\lg(I/I_0)} = 10^{-2}$; $\frac{I}{I_0} = 10^{-2} = 0{,}01$; $I = 0{,}01\cdot I_0$

d) $\ln\frac{2}{a} = -2$; $e^{\ln(2/a)} = e^{-2}$; $\frac{2}{a} = e^{-2}$; $a = 2\cdot e^2 = 14{,}778$

e) $\ln x_0 - \ln x = k$; $\ln\frac{x_0}{x} = k$; $e^{\ln(x_0/x)} = e^k$; $\frac{x_0}{x} = e^k$; $x = \frac{x_0}{e^k}$

f) $\lg t - \lg a = 2$; $\lg\frac{t}{a} = 2$; $10^{\lg(t/a)} = 10^2$; $\frac{t}{a} = 10^2 = 100$; $t = 100\cdot a$

Lösungsvariante: $\lg t - \lg a = 2$; $\lg\frac{t}{a} = 2$; $\lg\frac{t}{a} = \lg 10^2$; $\frac{t}{a} = 10^2$ usw.

4.46 **g)** $\ln\frac{2}{p}-\ln 10=q$; $\ln\frac{2}{10\cdot p}=q$; $\ln\frac{1}{5\cdot p}=q$; $e^{\ln[1/(5p)]}=e^{q}$; $\frac{1}{5\cdot p}=e^{q}$; $p=\frac{1}{5\cdot e^{q}}$

h) $\lg\frac{2}{x+1}=a$; $10^{\lg[2/(x+1)]}=10^{a}$; $\frac{2}{x+1}=10^{a}$; $2\cdot 10^{-a}=x+1$; $x=2\cdot 10^{-a}-1=\frac{2}{10^{a}}-1$

i) $e^{x+2}-1=b$; $e^{x+2}=b+1$; $\ln e^{x+2}=\ln(b+1)$; $x+2=\ln(b+1)$; $x=\ln(b+1)-2$

j) $t=T\cdot\sqrt{-\ln R}$; $\frac{t}{T}=\sqrt{-\ln R}$; $\left(\frac{t}{T}\right)^{2}=-\ln R$; $\ln R=-\left(\frac{t}{T}\right)^{2}$; $e^{\ln R}=e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^{2}}$; $R=e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^{2}}$

k) $p=e^{25{,}57-\frac{4934}{T}}$; $\ln p=\ln e^{25{,}57-\frac{4934}{T}}$; $\ln p=25{,}57-\frac{4934}{T}$; $T=\frac{4934}{25{,}57-\ln p}$

l) $\ln a-\ln\frac{1}{x}=1$; $\ln\frac{a}{1/x}=1$; $\ln(a\cdot x)=1$; $e^{\ln(a\cdot x)}=e^{1}$; $a\cdot x=e$; $x=\frac{e}{a}$

4.47 **a)** $R=e^{-\frac{t}{T}}$; $\ln R=\ln e^{-\frac{t}{T}}$; $\ln R=-\frac{t}{T}\cdot\ln e$; $\ln R=-\frac{t}{T}$; $t=-T\cdot\ln R$

b) $I=I_0\cdot e^{-\mu\cdot x}$; $\frac{I}{I_0}=e^{-\mu\cdot x}$; $\ln\frac{I}{I_0}=\ln e^{-\mu\cdot x}$; $\ln\frac{I}{I_0}=-\mu\cdot x$; $-\mu\cdot x=\ln I-\ln I_0$; $\mu=\frac{1}{x}\cdot\ln\frac{I_0}{I}$

c) $L=10\cdot\lg\frac{I}{I_0}$; $\lg\frac{I}{I_0}=\frac{1}{10}\cdot L$; $10^{\lg(I/I_0)}=10^{L/10}$; $\frac{I}{I_0}=\sqrt[10]{10^{L}}$; $I=I_0\cdot\sqrt[10]{10^{L}}$

d) $R=e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^{b}}$; $\ln R=\ln e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^{b}}$; $\ln R=-\left(\frac{t}{T}\right)^{b}\cdot\ln e$; $\ln R=-\left(\frac{t}{T}\right)^{b}$; $\left(\frac{t}{T}\right)^{b}=-\ln R$;

$\left(\frac{t}{T}\right)^{b}=\ln 1-\ln R$; $\left(\frac{t}{T}\right)^{b}=\ln\frac{1}{R}$; $\frac{t}{T}=\sqrt[b]{\ln\frac{1}{R}}$; $t=T\cdot\sqrt[b]{\ln\frac{1}{R}}$

e) $\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1}$; $\ln\frac{T_1}{T_2}=\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1}$; $\ln\frac{T_1}{T_2}=(\kappa-1)\cdot\ln\frac{V_2}{V_1}$; $\ln\frac{T_1}{T_2}=\kappa\cdot\ln\frac{V_2}{V_1}-\ln\frac{V_2}{V_1}$;

$\kappa=\frac{\ln(T_1/T_2)}{\ln(V_2/V_1)}+1$

f) $\frac{T_1}{T_2}=\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$; $\ln\frac{T_1}{T_2}=\ln\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$; $\ln\frac{T_1}{T_2}=\frac{\kappa-1}{\kappa}\cdot\ln\frac{p_1}{p_2}$; $\kappa\cdot\ln\frac{T_1}{T_2}=\kappa\cdot\ln\frac{p_1}{p_2}-\ln\frac{p_1}{p_2}$;

$\kappa=\frac{\ln(p_1/p_2)}{\ln(p_1/p_2)-\ln(T_1/T_2)}=\frac{\ln p_1-\ln p_2}{\ln p_1-\ln p_2-\ln T_1+\ln T_2}$

g) $S_2-S_1=m\cdot R\cdot\ln\frac{p_1}{p_2}$; $\frac{S_2-S_1}{m\cdot R}=\ln\frac{p_1}{p_2}$; $e^{\frac{S_2-S_1}{m\cdot R}}=e^{\ln(p_1/p_2)}$; $\frac{p_1}{p_2}=e^{\frac{S_2-S_1}{m\cdot R}}$

h) $C=\frac{2\pi\varepsilon\cdot l}{\ln(R/r)}$; $\ln\frac{R}{r}=\frac{2\pi\varepsilon\cdot l}{C}$; $e^{\ln\frac{R}{r}}=e^{\frac{2\pi\varepsilon\cdot l}{C}}$; $\frac{R}{r}=e^{\frac{2\pi\varepsilon\cdot l}{C}}$; $R=r\cdot e^{\frac{2\pi\varepsilon\cdot l}{C}}$

i) $W=m\cdot R\cdot T\cdot\ln\frac{V_2}{V_1}$; $\frac{W}{m\cdot R\cdot T}=\ln\frac{V_2}{V_1}$; $e^{\frac{W}{m\cdot R\cdot T}}=e^{\ln\frac{V_2}{V_1}}$; $e^{\frac{W}{m\cdot R\cdot T}}=\frac{V_2}{V_1}$; $V_1=V_2\cdot e^{-\frac{W}{m\cdot R\cdot T}}$

j) $\alpha=-\frac{1}{\mu}\cdot\ln\frac{F_2}{F_1}$; $-\alpha\cdot\mu=\ln\frac{F_2}{F_1}$; $e^{\ln(F_2/F_1)}=e^{-\alpha\cdot\mu}$; $\frac{F_2}{F_1}=e^{-\alpha\cdot\mu}$

k) $v^{2}=\frac{m\cdot g}{k}\cdot\left(1-e^{-\frac{2k}{m}\cdot s}\right)$; $\frac{k\cdot v^{2}}{m\cdot g}=1-e^{-\frac{2k}{m}\cdot s}$; $e^{-\frac{2k}{m}\cdot s}=1-\frac{k\cdot v^{2}}{m\cdot g}$; $\ln e^{-\frac{2k}{m}\cdot s}=\ln\left(1-\frac{k\cdot v^{2}}{m\cdot g}\right)$;

$-\frac{2k}{m}\cdot s\cdot\ln e=\ln\left(1-\frac{k\cdot v^{2}}{m\cdot g}\right)$; $-\frac{2k}{m}\cdot s=\ln\left(1-\frac{k\cdot v^{2}}{m\cdot g}\right)$; $s=-\frac{m}{2k}\cdot\ln\left(1-\frac{k\cdot v^{2}}{m\cdot g}\right)$

4.47 **l)** $i=\frac{U}{R}\cdot\left(1-e^{-\frac{R}{L}\cdot t}\right)$; $\frac{i\cdot R}{U}=1-e^{-\frac{R}{L}\cdot t}$; $e^{-\frac{R}{L}\cdot t}=1-\frac{i\cdot R}{U}$; $\ln e^{-\frac{R}{L}\cdot t}=\ln\left(1-\frac{i\cdot R}{U}\right)$;

$-\frac{R}{L}\cdot t\cdot\ln e=\ln\left(1-\frac{i\cdot R}{U}\right)$; $-\frac{R}{L}\cdot t=\ln\left(1-\frac{i\cdot R}{U}\right)$; $t=-\frac{L}{R}\cdot\ln\left(1-\frac{R}{U}\cdot i\right)$

4.48 **a)** $y=3^x=(e^{\ln 3})^x=e^{x\cdot\ln 3}$ **b)** $y=2{,}8^{-x}=(e^{\ln 2,8})^{-x}=e^{-x\cdot\ln 2,8}$ **c)** $y=0{,}9^t=(e^{\ln 0,9})^t=e^{t\cdot\ln 0,9}$

d) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$; $y=e^{x\cdot\ln\frac{1}{2}}=e^{x\cdot(\ln 1-\ln 2)}=e^{-x\cdot\ln 2}$ **e)** $y=0{,}4^{-\frac{t}{2}}$; $y=e^{-\frac{t}{2}\cdot\ln 0,4}=e^{-t\cdot\ln\sqrt{0,4}}$

4.49 **a)** $i=0{,}50\cdot(1-0{,}55^t)=0{,}2$; $1-0{,}55^t=0{,}4$; $0{,}55^t=0{,}6$; $\ln 0{,}55^t=\ln 0{,}6$; $t\cdot\ln 0{,}55=\ln 0{,}6$;

$t=\frac{\ln 0{,}6}{\ln 0{,}55}=0{,}85\text{ s}$;

$i=0{,}50\cdot(1-0{,}55^t)=0{,}45$; $1-0{,}55^t=0{,}9$; $0{,}55^t=0{,}1$; $\ln 0{,}55^t=\ln 0{,}1$; $t\cdot\ln 0{,}55=\ln 0{,}1$;

$t=\frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}55}=3{,}85\text{ s}$;

b) $\vartheta=20\cdot(1-0{,}7\cdot e^{-t/15})=12$; $1-0{,}7\cdot e^{-t/15}=0{,}6$; $0{,}7\cdot e^{-t/15}=0{,}4$; $e^{-t/15}=\frac{4}{7}$; $\ln e^{-t/15}=\ln\frac{4}{7}$;

$-\frac{t}{15}\cdot\ln e=\ln\frac{4}{7}$; $-\frac{t}{15}=\ln\frac{4}{7}$; $t=-15\cdot\ln\frac{4}{7}=8{,}4\text{ min}$

c) $i=5\cdot\left(1-e^{-t/0,375}\right)=0{,}9\cdot 5$; $1-e^{-t/0,375}=0{,}9$; $e^{-t/0,375}=0{,}1$; $\ln e^{-t/0,375}=\ln 0{,}1$;

$-\frac{t}{0{,}375}\cdot\ln e=\ln 0{,}1$; $-\frac{t}{0{,}375}=\ln 0{,}1$; $t=-0{,}375\cdot\ln 0{,}1=0{,}86\text{ s}$

d) $u_C=25\cdot\left(1-e^{-t/\tau}\right)=12$; $1-e^{-t/\tau}=0{,}48$; $e^{-t/\tau}=0{,}52$; $\ln e^{-t/\tau}=\ln 0{,}52$; $-\frac{t}{\tau}\cdot\ln e=\ln 0{,}52$;

$-\frac{t}{\tau}=\ln 0{,}52$; $t=-\tau\cdot\ln 0{,}52=-0{,}03\cdot\ln 0{,}52=0{,}020\text{ s}$

e) $u=40\cdot e^{-t/\tau}=20$; $e^{-t/\tau}=0{,}5$; $\ln e^{-t/\tau}=\ln 0{,}5$; $-\frac{t}{\tau}\cdot\ln e=\ln 0{,}5$; $-\frac{t}{\tau}=\ln 0{,}5$;

$t=-\tau\cdot\ln 0{,}5=-0{,}0004\cdot\ln 0{,}5=0{,}000277\text{ s}=277\ \mu\text{s}$

f) $N=N_0\cdot e^{-\lambda\cdot t}=\frac{1}{2}\cdot N_0$; $e^{-\lambda\cdot t}=\frac{1}{2}$; $\ln e^{-\lambda\cdot t}=\ln\frac{1}{2}$; $-\lambda\cdot t\cdot\ln e=\ln 1-\ln 2$; $-\lambda\cdot t=-\ln 2$;

$t=T_{1/2}=\frac{\ln 2}{\lambda}=\frac{\ln 2}{2{,}09\cdot 10^{-6}}=331649\text{ s}=3{,}84\text{ Tage}$

g) $I=I_0\cdot e^{-\mu\cdot d}=\frac{1}{2}\cdot I_0$; $e^{-\mu\cdot d}=\frac{1}{2}$; $\ln e^{-\mu\cdot d}=\ln\frac{1}{2}$; $-\mu\cdot d\cdot\ln e=\ln 1-\ln 2$; $-\mu\cdot d=-\ln 2$;

$d=d_{1/2}=\frac{\ln 2}{\mu}=\frac{\ln 2}{0{,}518}=1{,}33\text{ cm}$

4.50 $N=N_0\cdot e^{-\lambda\cdot t}=\frac{1}{2}\cdot N_0$; $e^{-\lambda\cdot t}=\frac{1}{2}$; $\ln e^{-\lambda\cdot t}=\ln\frac{1}{2}$; $-\lambda\cdot t\cdot\ln e=\ln 1-\ln 2$; $-\lambda\cdot t=-\ln 2$;

$t=T_{1/2}=\frac{\ln 2}{\lambda}$

4.51 **a)** $A=A_0\cdot e^{-\lambda\cdot t}$; $\frac{A}{A_0}=e^{-\lambda\cdot t}$; $\ln\frac{A}{A_0}=\ln e^{-\lambda\cdot t}$; $\ln\frac{A}{A_0}=-\lambda\cdot t\cdot\ln e$; $\ln\frac{A}{A_0}=-\lambda\cdot t$;

$t=-\frac{1}{\lambda}\cdot\ln\frac{A}{A_0}=-\frac{1}{\lambda}\cdot(\ln A-\ln A_0)=\frac{1}{\lambda}\cdot(\ln A_0-\ln A)=\frac{1}{\lambda}\cdot\ln\frac{A_0}{A}$

4.51 **b)** $5 = 50 \cdot e^{-0{,}012 \cdot t}$; $0{,}1 = e^{-0{,}012 \cdot t}$; $\ln 0{,}1 = \ln e^{-0{,}012 \cdot t}$; $\ln 0{,}1 = -0{,}012 \cdot t \cdot \ln e$; $\ln 0{,}1 = -0{,}012 \cdot t$

$t = -\frac{\ln(0{,}1)}{0{,}012} \approx 192\ \text{s}$

c) $A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = \frac{1}{2} \cdot A_0$; $e^{-\lambda \cdot t} = \frac{1}{2}$; $\ln e^{-\lambda \cdot t} = \ln \frac{1}{2}$; $-\lambda \cdot t \cdot \ln e = \ln 1 - \ln 2$; $-\lambda \cdot t = -\ln 2$;

$t = T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{0{,}012} = 58\ \text{s}$

4.52 **a)** $\ln \frac{\hat{y}_0}{\hat{y}_1} = \ln \frac{8}{5} = 0{,}47$

b) $\ln \frac{\hat{y}_1}{\hat{y}_2} = \ln \frac{\hat{y}_2}{\hat{y}_3} = \ln \frac{\hat{y}_3}{\hat{y}_4} = \ln \frac{\hat{y}_0}{\hat{y}_1} = \ln \frac{8}{5} = 0{,}47 \quad \Rightarrow \quad \frac{\hat{y}_1}{\hat{y}_2} = \frac{\hat{y}_2}{\hat{y}_3} = \frac{\hat{y}_3}{\hat{y}_4} = e^{\ln \frac{8}{5}} = \frac{8}{5}$

$\hat{y}_2 = \frac{5}{8} \cdot \hat{y}_1 \approx 3{,}1\ \text{cm}$; $\hat{y}_3 = \frac{5}{8} \cdot \hat{y}_2 \approx 2{,}0\ \text{cm}$; $\hat{y}_4 = \frac{5}{8} \cdot \hat{y}_3 \approx 1{,}2\ \text{cm}$

c) $\hat{y}_4 = \frac{5}{8} \cdot \hat{y}_3 = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \hat{y}_2 = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \hat{y}_1 = \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} \cdot \hat{y}_0 = \left(\frac{5}{8}\right)^4 \cdot \hat{y}_0 = \left(\frac{\hat{y}_1}{\hat{y}_0}\right)^4 \cdot \hat{y}_0$;

allgemein: $\hat{y}_n = \left(\frac{5}{8}\right)^n \cdot \hat{y}_0 = \left(\frac{\hat{y}_1}{\hat{y}_0}\right)^n \cdot \hat{y}_0$

4.53 $F = F_G \cdot e^{\mu \cdot \alpha}$; $e^{\mu \cdot \alpha} = \frac{F}{F_G}$; $\ln e^{\mu \cdot \alpha} = \ln \frac{F}{F_G}$; $\mu \cdot \alpha = \ln \frac{F}{F_G}$; $\alpha = \frac{1}{\mu} \cdot \ln \frac{F}{F_G}$;

a) $\alpha = \frac{1}{0{,}25} \cdot \ln \frac{200}{180} = 0{,}423\ \text{rad} = 0{,}423 \cdot \frac{180°}{\pi} = 24{,}1°$

b) $\alpha = \frac{1}{0{,}25} \cdot \ln \frac{200}{150} = 1{,}151\ \text{rad} = 65{,}9°$ **c)** $\alpha = \frac{1}{0{,}25} \cdot \ln \frac{200}{100} = 2{,}773\ \text{rad} = 158{,}9°$

4.54 $I(x) = I_0 \cdot e^{-2{,}4 \cdot x} = \frac{1}{2} \cdot I_0$; $e^{-2{,}4 \cdot x} = \frac{1}{2}$; $\ln e^{-2{,}4 \cdot x} = \ln \frac{1}{2}$; $-2{,}4 \cdot x \cdot \ln e = \ln 1 - \ln 2$;

$-2{,}4 \cdot x = -\ln 2$; $x = \frac{\ln 2}{2{,}4} = 0{,}29\ \text{m} = x_{1/2}$

4.55 **a)** Temperatur im Kühlschrank = anfängliche Temperatur der Milch: $\vartheta(0) = 21 - 17 = 4°\text{C}$
Temperatur im Zimmer = Temperatur der Milch nach sehr langer Zeit (t geht theoretisch nach ∞): $17 \cdot e^{-t/\tau}$ geht gegen null; also geht ϑ für t nach ∞ gegen $21 - 0 = 21°\text{C}$

b) $21 - 17 \cdot e^{-\frac{0{,}5}{\tau}} = 10$; $17 \cdot e^{-\frac{0{,}5}{\tau}} = 11$; $e^{-\frac{0{,}5}{\tau}} = \frac{11}{17}$; $\ln e^{-\frac{0{,}5}{\tau}} = \ln \frac{11}{17}$; $-\frac{0{,}5}{\tau} \cdot \ln e = \ln \frac{11}{17}$;

$\frac{0{,}5}{\tau} = \ln \frac{11}{17}$; $\tau = -\frac{0{,}5}{\ln(11/17)} = 1{,}15\ \text{h}$

c) $18 = 21 - 17 \cdot e^{-\frac{t}{1{,}15}}$; $-\frac{3}{17} = -e^{-\frac{t}{1{,}15}}$; $e^{-\frac{t}{1{,}15}} = \frac{3}{17}$; $\ln e^{-\frac{t}{1{,}15}} = \ln \frac{3}{17}$; $-\frac{t}{1{,}15} \cdot \ln e = \ln \frac{3}{17}$;

$-\frac{t}{1{,}15} = \ln \frac{3}{17}$; $t = -1{,}15 \cdot \ln \frac{3}{17} \approx 2{,}0\ \text{h}$

4.56 **a)** $p^2 = I \cdot Z$; $p_0^2 = I_0 \cdot Z$; $L = 10 \cdot \lg \frac{p^2}{p_0^2} = 10 \cdot \lg \frac{I \cdot Z}{I_0 \cdot Z} = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0}$ (beide in dB)

b) $L_1 = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0}$ Schallpegel bei I, $L_2 = 10 \cdot \lg \frac{2I}{I_0}$ Schallpegel bei Verdopplung von I (beide in dB)

$L_2 = 10 \cdot \lg \frac{2\,I}{I_0} = 10 \cdot \lg \left(2 \cdot \frac{I}{I_0} \right) = 10 \cdot \lg 2 + 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0} \approx 3 + L_1$. Eine Verdopplung der Intensität erhöht den Schallpegel um 3 dB.

$L_1 = 10 \cdot \lg \frac{p^2}{p_0^2}$ Pegel bei p; $L_2 = 10 \cdot \lg \frac{(2p)^2}{p_0^2}$ Pegel bei Verdopplung von p (in dB).

$L_2 = 10 \cdot \lg \frac{(2p)^2}{p_0^2} = 10 \cdot \lg \left(4 \cdot \frac{p^2}{p_0^2} \right) = 10 \cdot \lg 4 + 10 \cdot \lg \frac{p^2}{p_0^2} \approx 6 + L_1$. Eine Verdopplung des Schall(wechsel)drucks erhöht den Schallpegel um 6 dB.

4.57 Schallpegel $L = 10 \cdot \lg \frac{p^2}{p_0^2} = 20 \cdot \lg \frac{p}{p_0}$ mit $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ N/m^2 (Beisp. 4.22, Lehrbuch S. 103);

Schallpegel im Raum: $L_1 = 20 \cdot \lg \frac{p}{p_0} = 20 \cdot \lg \frac{0{,}2}{2 \cdot 10^{-5}} = 80$ dB; Schallpegel außerhalb des Raums: $L_2 = 20 \cdot \lg \frac{p}{p_0} = 20 \cdot \lg \frac{0{,}01}{2 \cdot 10^{-5}} \approx 54$ dB; Schalldämmung der Wand $L^2 - L_1 = -26$ dB.

Alternative Rechnung: $L_2 - L_1 = 20 \cdot \lg \frac{0{,}01}{2 \cdot 10^{-5}} - 20 \cdot \lg \frac{0{,}2}{2 \cdot 10^{-5}} = 20 \cdot \left(\lg \frac{0{,}01}{2 \cdot 10^{-5}} - \lg \frac{0{,}2}{2 \cdot 10^{-5}} \right) =$

$$= 20 \cdot \lg \frac{\left(0{,}01/2 \cdot 10^{-5}\right)}{\left(0{,}2/2 \cdot 10^{-5}\right)} = 20 \cdot \lg \frac{0{,}01}{0{,}2} \approx -26 \text{ dB}$$

4.58 $L = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0}$; $\frac{L}{10} = \lg \frac{I}{I_0}$; $10^{\frac{L}{10}} = 10^{\lg \frac{I}{I_0}}$; $10^{\frac{L}{10}} = \frac{I}{I_0}$; $I = I_0 \cdot 10^{\frac{L}{10}}$ mit $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2 als Schallintensität bei der Hörschwelle (siehe Aufgabe 4.56).

$I_1 = I_0 \cdot 10^{\frac{60}{10}} = I_0 \cdot 10^6$; $I_2 = I_0 \cdot 10^{\frac{63}{10}} = I_0 \cdot 10^{6{,}3}$; $I_3 = I_0 \cdot 10^{\frac{64}{10}} = I_0 \cdot 10^{6{,}4}$;

$$L = 10 \cdot \lg \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_0} = 10 \cdot \lg \frac{I_0 \cdot 10^6 + I_0 \cdot 10^{6{,}3} + I_0 \cdot 10^{6{,}4}}{I_0} = 10 \cdot \lg\left(10^6 + 10^{6{,}3} + 10^{6{,}4}\right) \approx 67 \text{ dB}$$

4.59 $G_U = 20 \cdot \lg \frac{U_a}{U_e}$;

$-10 = 20 \cdot \lg \frac{U_2}{U_1}$; $-\frac{10}{20} = \lg \frac{U_2}{U_1}$; $10^{-\frac{10}{20}} = 10^{\lg \frac{U_2}{U_1}}$; $10^{-\frac{10}{20}} = \frac{U_2}{U_1}$; $U_2 = U_1 \cdot 10^{-\frac{10}{20}}$;

analog: $-4 = 20 \cdot \lg \frac{U_3}{U_2} \Rightarrow U_3 = U_2 \cdot 10^{-\frac{4}{20}}$; $U_3 = U_1 \cdot 10^{-\frac{10}{20}} \cdot 10^{-\frac{4}{20}} = \cdot U_1 \cdot 10^{-\frac{14}{20}} \approx \frac{1}{5}\, U_1$

$U_3 : U_1 = 1 : 5$.

Warum werden die dB–Werte addiert?

$G_U = 20 \cdot \lg \frac{U_3}{U_1} = 20 \cdot \lg \left(\frac{U_3}{U_2} \cdot \frac{U_2}{U_1} \right) = 20 \cdot \left(\lg \frac{U_3}{U_2} + \lg \frac{U_2}{U_1} \right) = 20 \cdot \lg \frac{U_3}{U_2} + 20 \cdot \lg \frac{U_2}{U_1} =$

$= -4 \text{ dB} - 10 \text{ dB} = -14 \text{ dB}$. *Lösungsvariante*: $20 \cdot \lg \frac{U_3}{U_1} = -14$; daraus $U_3 : U_1 = 1 : 5$.

4.60 $20 \cdot \lg \frac{U_a}{10 \cdot 10^{-3}} = -6;\quad \lg \frac{U_a}{0{,}01} = -0{,}3;\quad 10^{\lg \frac{U_a}{0{,}01}} = 10^{-0{,}3};\quad \frac{U_a}{0{,}01} = 10^{-0{,}3};$

$U_a = 0{,}01 \cdot 10^{-0{,}3}\ \mathrm{V} \approx 0{,}0050\ \mathrm{V} = 5{,}0\ \mathrm{mV}$

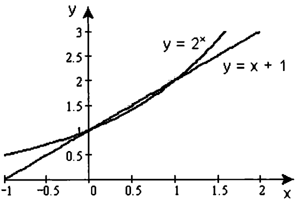
4.61 U Ausgangsspannung der ersten und auch Eingangsspannung der zweiten Übertragungsstrecke;

$$G_U = 20 \cdot \lg \frac{U_a}{U_e} = 20 \cdot \lg\left(\frac{U_a}{U} \cdot \frac{U}{U_e}\right) = 20 \cdot \left(\lg \frac{U_a}{U} + \lg \frac{U}{U_e}\right) = 20 \cdot \lg \frac{U_a}{U} + 20 \cdot \lg \frac{U}{U_e} = -4 - 4 = -8;$$

$$20 \cdot \lg \frac{U_a}{U_e} = -8;\quad \lg \frac{U_a}{U_e} = -0{,}4;\quad 10^{\lg \frac{U_a}{U_e}} = 10^{-0{,}4};\quad \frac{U_a}{U_e} = 10^{-0{,}4};\quad U_a = 10^{-0{,}4} \cdot 0{,}1\ \mathrm{V} \approx 40\ \mathrm{mV}$$

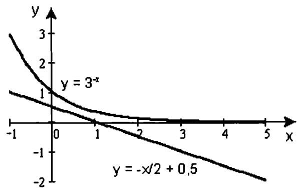
4.62 Graphische Lösung durch Ermittlung der Schnittstelle(n) der Graphen von $y = f(x)$ und $y = g(x)$.

a) $f(x) = 2^x;\ g(x) = x + 1$



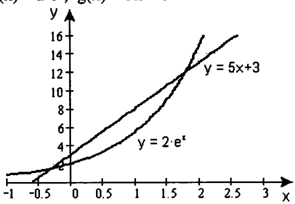
Lösungen: $x_1 = 0;\ x_2 = 1$

b) $f(x) = 3^{-x};\ g(x) = -x/2 + 0{,}8$



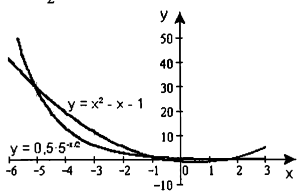
Kein Schnittpunkt, keine Lösung

c) $f(x) = 2 \cdot e^x;\ g(x) = 5x + 3$



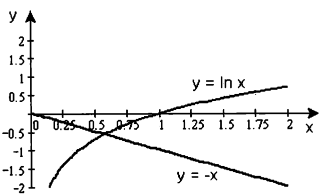
Lösungen: $x_1 \approx -0{,}3;\ x_2 \approx 1{,}8$

d) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot 5^{-\frac{x}{2}};\ g(x) = x^2 - x - 1$



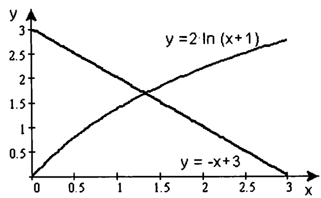
Lösungen: $x_1 \approx -5{,}1;\ x_2 \approx -1{,}1;\ x_3 \approx 1{,}7$

4.63 **a)** $f(x) = \ln x;\ g(x) = -x$



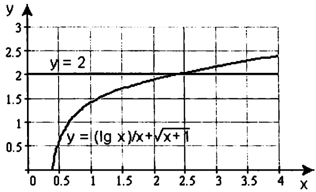
Lösung: $x \approx 0{,}6$

b) $f(x) = 2 \cdot \ln(x + 1);\ g(x) = -x + 3$



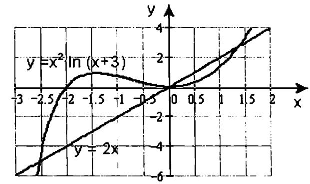
Lösung: $x \approx 1{,}3$

4.63 **c)** $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \lg x + \sqrt{x+1}$; $g(x) = 2$



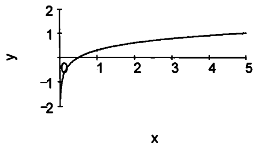
Lösung: $x \approx 2{,}4$

d) $f(x) = x^2 \cdot \ln(x+3)$; $g(x) = 2x$

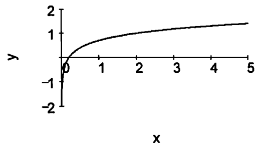


Lösungen: $x_1 \approx -2{,}5$; $x_2 = 0$; $x_3 \approx 1{,}4$

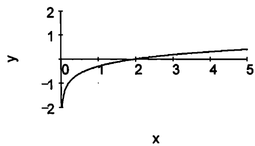
4.64 **a)**



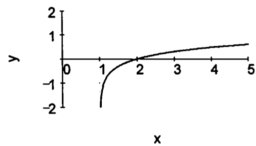
b)



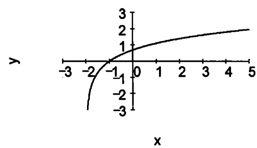
c)



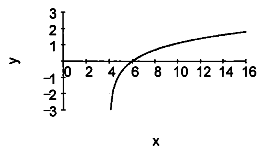
d)



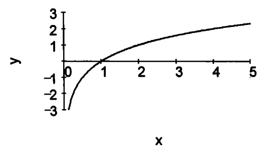
e)



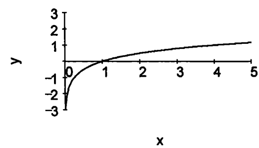
f)



g)



h)



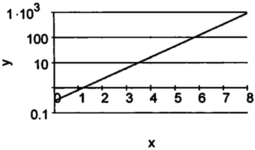
4.65 **a)** $n^2 = 10^4 \mathrel{\hat{=}} 10^{-2}\,\text{s}$ $\quad n \cdot \log_2 n = 6{,}64 \cdot 10^2 \mathrel{\hat{=}} \text{ca. } 7 \cdot 10^{-4}\,\text{s}$

b) $n^2 = 10^6 \mathrel{\hat{=}} 1\,\text{s}$ $\quad n \cdot \log_2 n = 1{,}00 \cdot 10^4 \mathrel{\hat{=}} 10^{-2}\,\text{s}$

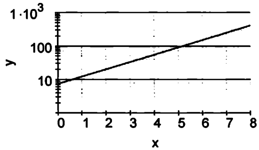
c) $n^2 = 10^{10} \mathrel{\hat{=}} \text{ca. } 2{,}8\,\text{h}$ $\quad n \cdot \log_2 n = 1{,}66 \cdot 10^6 \mathrel{\hat{=}} \text{ca. } 1{,}7\,\text{s}$

d) $n^2 = 10^{12} \mathrel{\hat{=}} \text{ca. } 11{,}6 \text{ Tage}$ $\quad n \cdot \log_2 n = 1{,}99 \cdot 10^7 \mathrel{\hat{=}} \text{ca. } 20\,\text{s}$

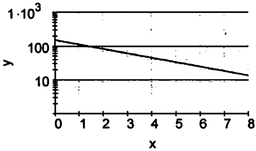
4.66 a)



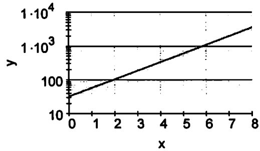
b)



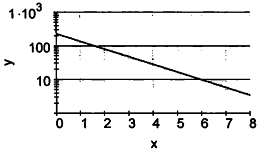
c)



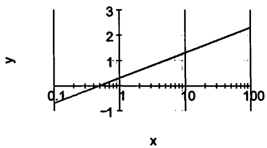
d



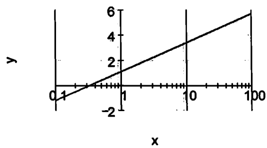
e)



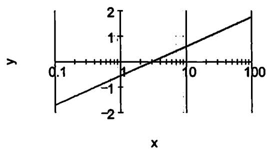
4.67 a)



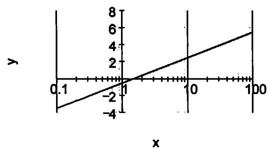
b)



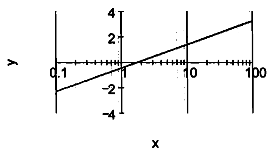
c)



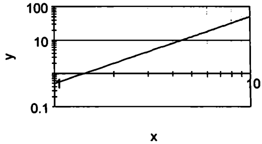
d)



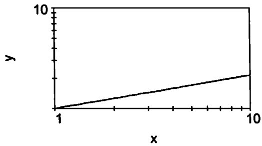
e)



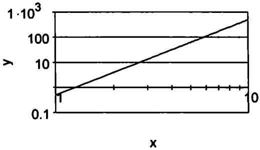
4.68 a)



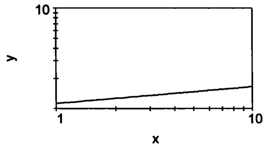
b)



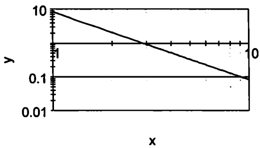
c)



d)

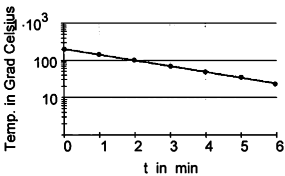


e)



4.69 **a)** Im ordinatenlogarithmischen Papier
b) Im doppeltlogarithmischen Papier
c) Im abszissenlogarithmischen Papier
d) Im doppeltlogarithmischen Papier
e) Im ordinatenlogarithmischen Papier

4.70

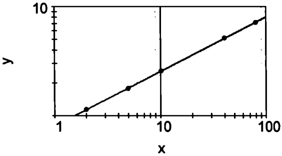


Die Punkte liegen im ordinatenlogarithmischen Papier auf einer Gerade

$\vartheta(t) = c \cdot e^{-k \cdot t}$;
zur Bestimmung von c und k werden zwei Punkte gewählt, die möglichst nahe der Geraden liegen: (0/200), (6/23,3). Einsetzen in die Funktionsgleichung ergibt ein lineares Gleichungssystem:
I: $200 = c \cdot e^{-k \cdot 0}$
II: $\underline{23{,}3 = c \cdot e^{-k \cdot 6}}$
$\mathrm{I} \Rightarrow c = 200$;
$23{,}3 = 200 \cdot e^{-6k}$ |: 200; $0{,}1165 = e^{-6k}$;
$\ln 0{,}1165 = \ln e^{-6k}$; $\ln 0{,}1165 = -6k \Rightarrow k = 0{,}358$;

$\vartheta(t) = c \cdot e^{-k \cdot t} = 200 \cdot e^{-0{,}358 \cdot t} = 200 \cdot \left(e^{-0{,}358}\right)^t = 200 \cdot 0{,}70^t$

4.71



Die Punkte liegen im doppeltlogarithmischen Papier auf einer Gerade; daher liegt eine Potenzfunktion vor: $y = c \cdot x^n$;

$y = c \cdot x^n$; zur Bestimmung von c und n werden zwei Punkte gewählt, die möglichst nahe der Geraden liegen: (10/2,5), (80/7,2). Einsetzen in die Funktionsgleichung ergibt ein lineares Gleichungssystem:

I: $2{,}5 = c \cdot 10^n$; I $\Rightarrow c = \dfrac{2{,}5}{10^n}$; in II einsetzen:
II: $\underline{7{,}2 = c \cdot 80^n}$

$7{,}2 = \dfrac{2{,}5}{10^n} \cdot 80^n$; $7{,}2 = 2{,}5 \cdot \dfrac{80^n}{10^n}$; $7{,}2 = 2{,}5 \cdot \left(\dfrac{80}{10}\right)^n$;

$7{,}2 = 2{,}5 \cdot 8^n$ |:2,5; $2{,}88 = 8^n$; $\ln 2{,}88 = \ln 8^n$; $\ln 2{,}88 = n \cdot \ln 8$; $n \approx 0{,}5$; $c = \dfrac{2{,}5}{10^n} \approx 0{,}8$;

$y = 0{,}8 \cdot x^{1/2} = 0{,}8 \cdot \sqrt{x}$ **(die Funktionsgleichung hängt von der Genauigkeit der abgelesenen Punkte ab)**

4.72 Die Funktionsgleichungen hängen von der Genauigkeit der abgelesenen Punkte ab. In diesem Sinn sind die folgenden Lösungen zu sehen.

a) Gerade in einem ordinatenlogarithmischen Papier: Exponentialfunktion $y = c \cdot e^{k \cdot x}$.

Abgelesen: P(-4/0,01) und Q(2/4);

I: $0{,}01 = c \cdot e^{-4k \cdot}$

II: $\underline{4 = c \cdot e^{2k}}$

I $\Rightarrow c = 0{,}01 \cdot e^{4k}$ in II einsetzen: $4 = 0{,}01 \cdot e^{4k} \cdot e^{2k} = 0{,}01 \cdot e^{6k}$; Multiplikation mit 100 führt auf $400 = e^{6k}$; $\ln 400 = \ln e^{6k}$; $\ln 400 = 6k \cdot \ln e$; $\ln 400 = 6k$ $k = 1{,}00$; $c = 0{,}01 \cdot e^{4k} \approx 0{,}54$;

$y = 0{,}54 \cdot e^x = 0{,}54 \cdot 2{,}7^x$

b) Gerade in einem ordinatenlogarithmischen Papier: Exponentialfunktion $y = c \cdot a^x$.

Abgelesen: P(-4/100) und Q(0/2);

I: $100 = c \cdot a^{-4 \cdot}$

II: $\underline{2 = c \cdot a^0}$ $\Rightarrow$ $c = 2$; in I einsetzen:

$100 = 2 \cdot a^{-4}$; $50 = a^{-4}$; $a = \sqrt[4]{\frac{1}{50}} \approx 0{,}38.$

$y = 2 \cdot 0{,}38^x = 2 \cdot (e^{\ln 0{,}38}) = 2 \cdot e^{-0{,}98 \cdot x}$

c) Gerade in einem doppeltlogarithmischen Papier: Potenzfunktion $y = c \cdot x^n$.

Abgelesen: P(0,6/0,1) und Q(1/0,8);

I: $0{,}1 = c \cdot 0{,}6^{n \cdot}$

II: $\underline{0{,}8 = c \cdot 1^n}$ $\Rightarrow$ $c = 0{,}8$; in I einsetzen:

$0{,}1 = 0{,}8 \cdot 0{,}6^n$; $0{,}125 = 0{,}6^n$; $\ln 0{,}125 = \ln 0{,}6^n$; $\ln 0{,}125 = n \cdot \ln 0{,}6$; $n = 4{,}1$

$y = 0{,}8 \cdot x^{4,1}$

d) Gerade in einem doppeltlogarithmischen Papier: Potenzfunktion $y = c \cdot x^n$.

Abgelesen: P(0,7/1) und Q(6/2);

I: $1 = c \cdot 0{,}7^{n \cdot}$

II: $\underline{2 = c \cdot 6^n}$

II durch I ergibt $2 = \frac{6^n}{0{,}7^n}$; $2 = \left(\frac{6}{0{,}7}\right)^n$; $\ln 2 = \ln\left(\frac{6}{0{,}7}\right)^n$; $\ln 2 = n \cdot \ln\frac{6}{0{,}7}$; $n = 0{,}32$;

I $\Rightarrow$ $c = \frac{1}{0{,}7^n} = \frac{1}{0{,}7^{0{,}32}} \approx 1{,}1$; $y = 1{,}1 \cdot x^{0{,}32}$

4.73 a) $\sinh 2{,}1 = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{2,1} - e^{-2,1}\right) = 4{,}022$

b) $\sinh(-1{,}8) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{-1,8} - e^{-(-1,8)}\right) = -2{,}942$

c) $\cosh 2{,}1 = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{2,1} + e^{-2,1}\right) = 4{,}144$

d) $\cosh(-2{,}1) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{-2,1} + e^{-(-2,1)}\right) = 4{,}144$

e) $\cosh 0 = \frac{1}{2} \cdot \left(e^0 + e^{-0}\right) = \frac{1}{2} \cdot (1+1) = 1$

f) $\tanh 2 = \frac{\sinh 2}{\cosh 2} = 0{,}964$

g) $\tanh 0{,}4 = \frac{\sinh 0{,}4}{\cosh 0{,}4} = 0{,}380$

h) $\tanh(-1{,}8) = \frac{\sinh(-1{,}8)}{\cosh(-1{,}8)} = -0{,}947$

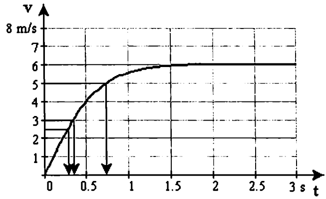
4.74 **a)** $\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4} \cdot \left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \frac{1}{4} \cdot \left(e^x - e^{-x}\right)^2 =$

$= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}\right) - \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}\right) = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot e^x e^{-x} = e^0 = 1$

b) $\cosh^2 x + \sinh^2 x = \frac{1}{4} \cdot \left(e^x + e^{-x}\right)^2 + \frac{1}{4} \cdot \left(e^x - e^{-x}\right)^2 =$

$= \frac{1}{4} \cdot \left(e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}\right) + \frac{1}{4} \cdot \left(e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{2x} + e^{-2x}\right) = \cosh 2x$

4.75 **a)**



b) Graphisch: ca. 0,3 s bzw. ca. 0,7 s.

Rechnerisch: $v = 6 \cdot \tanh \frac{9{,}81 \cdot t}{6}$;

$\frac{v}{6} = \tanh \frac{9{,}81 \cdot t}{6}$; $\frac{v}{6} = \tanh \frac{9{,}81 \cdot t}{6}$

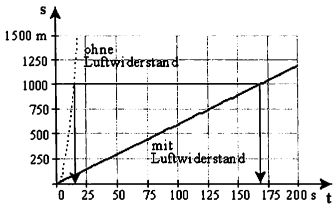
$\frac{9{,}81 \cdot t}{6} = \operatorname{ar\,tanh} \frac{v}{6}$; $t = \frac{6}{9{,}81} \cdot \operatorname{ar\,tanh} \frac{v}{6}$;

$v = 2{,}5$ m/s: $t = \frac{6}{9{,}81} \cdot \operatorname{ar\,tanh} \frac{2{,}5}{6} = 0{,}27$ s

$v = 5$ m/s: $t = 0{,}73$ s

c) Graphisch ca. 0,35 s. Rechnerisch: $v = 3$ m/s: $t = \frac{6}{9{,}81} \cdot \operatorname{ar\,tanh} \frac{3}{6} = 0{,}34$ s

d)



e) $s(0{,}1) = \frac{6^2}{9{,}81} \cdot \ln\left(\cosh \frac{9{,}81 \cdot 0{,}1}{6}\right) = 0{,}05$ m

$s(1) = \frac{6^2}{9{,}81} \cdot \ln\left(\cosh \frac{9{,}81 \cdot 1}{6}\right) = 3{,}6$ m

Zum Vergleich ohne Luftwiderstand:

$s(0{,}1) = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}05$ m;

$s(1) = 4{,}9$ m

f) Graphisch: ca. 170 s; zum Vergleich ohne Luftwiderstand: ca. 15 s.
Rechnerisch bei Luftwiderstand:

$$1000 = \frac{6^2}{9{,}81} \cdot \ln\left[\cosh\left(\frac{9{,}81}{6} \cdot t\right)\right]; \quad 272{,}5 = \ln\left[\cosh\left(\frac{9{,}81}{6} \cdot t\right)\right]; \quad e^{272{,}5} = e^{\ln[\ldots]};$$

$$e^{272{,}5} = \cosh\left(\frac{9{,}81}{6} \cdot t\right); \quad \frac{9{,}81}{6} \cdot t = \operatorname{ar\,cosh}\left(e^{272{,}5}\right); \quad t = \frac{6}{9{,}81} \cdot \operatorname{ar\,cosh}\left(e^{272{,}5}\right) \approx 167 \text{ s}$$

Rechnerisch ohne Luftwiderstand: $1000 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t^2$; $t = \sqrt{203{,}87} \approx 14$ s

4.76 $y(150) = 100 \cdot \cosh \frac{150}{100} = 235{,}24$; R(150/235,24). Durchhang $d = 235{,}24 \text{ m} - a \approx 135$ m

4.77 **a)** $y(0) = 800 \ \cosh \frac{0}{800} - 791 = 9$ m über dem Erdboden

b) Parabel: $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Da die Parabelachse mit der y-Achse zusammenfällt, ist $b = 0$.

$y = a \cdot x^2 + c$; Parabelpunkte P(-40/10), Q(0/9):

I: $10 = a \cdot (-40)^2 + c$

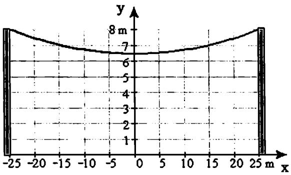
$\underline{\text{II: } 9 = a \cdot 0^2 + c}$ $\Rightarrow$ $c = 9$ in I einsetzen: $10 = a \cdot 1600 + 9$; $a = \frac{1}{1600}$; Parabel: $y = \frac{1}{1600} \cdot x^2 + 9$;

Kettenlinie: $y(20) = 800 \ \cosh \frac{20}{800} - 791 = 9{,}250013$; Parabel: $y(20) = \frac{1}{1600} \cdot 20^2 + 9 = 9{,}25000$;

Unterschied: $9{,}250013 \text{ m} - 9{,}25000 \text{ m} = 0{,}013$ mm

4.78 **a)** $8 = 200 \cdot \cosh\frac{25}{200} + b; \quad b = -193{,}6\ \text{m}$

b) y(0) = 200 – 193,6 = 6,4 m.
Der Abstand beträgt 6,4 m; der Mindestabstand ist eingehalten



4.79 **a)** $\operatorname{arsinh} 2{,}6 = \ln\left(2{,}6 + \sqrt{2{,}6^2 + 1}\right) = 1{,}6837$

b) $\operatorname{arsinh}(-0{,}4) = \ln\left(-0{,}4 + \sqrt{(-0{,}4)^2 + 1}\right) = -0{,}3900$

c) $\operatorname{arcosh} 1{,}5 = \ln\left(1{,}5 + \sqrt{1{,}5^2 - 1}\right) = 0{,}9624$

d) $\operatorname{arcosh} 1 = \ln\left(1 + \sqrt{1^2 - 1}\right) = 0$

e) $\operatorname{arcosh} 4 = \ln\left(4 + \sqrt{4^2 - 1}\right) = 2{,}0634$

f) $\operatorname{artanh} 0 = \frac{1}{2} \cdot \ln\frac{1+0}{1-0} = 0$

g) $\operatorname{artanh} 0{,}3 = \frac{1}{2} \cdot \ln\frac{1+0{,}3}{1-0{,}3} = 0{,}3095$

h) $\operatorname{artanh}(-0{,}8) = \frac{1}{2} \cdot \ln\frac{1-0{,}8}{1+0{,}8} = -1{,}0986$

4.80 **a)** $y = \operatorname{arcosh} x$ oder $x = \cosh y = \frac{1}{2} \cdot \left(e^y + e^{-y}\right)$. Setzt man $u = e^y$, so erhält man

$x = \frac{1}{2} \cdot (u + 1/u)$ oder umgeformt $u^2 - 2x \cdot u + 1 = 0$.

Lösung dieser quadratischen Gleichung nach u:

$u_1 = x + \sqrt{x^2 - 1} > 0$ sowie $u_2 = x - \sqrt{x^2 - 1} < 0$, jeweils für $x \geq 1$.

Nur $u_1 = e^y$ ist möglich, da $e^y > 0$.

$y = \operatorname{arcosh} x = \ln u_1 = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right),\ x \geq 1$

b) $y = \operatorname{artanh} x$ oder $x = \tanh y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$.

Setzt man $u = e^y$, so erhält man $x = \dfrac{u - 1/u}{u + 1/u}$ oder umgeformt $u^2 = \dfrac{1+x}{1-x}$.

Dabei muss der Bruch positiv sein, d.h. $|x| < 1$!

Da $u^2 = (e^y)^2 = e^{2y}$ folgt aus $e^{2y} = \dfrac{1+x}{1-x}$

$2y = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$ oder $y = \operatorname{ar}\tanh x = \dfrac{1}{2} \cdot \ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

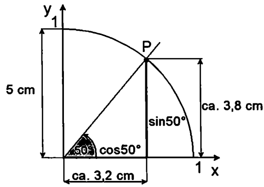
5 Kreisfunktionen

5.1 **a)** $\frac{3{,}8\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 0{,}76 \Rightarrow \sin 50° \approx 0{,}76;$

Taschenrechner: $\sin 50° = 0{,}766$

b) $\frac{3{,}2\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 0{,}64 \Rightarrow \cos 50° \approx 0{,}64;$

Taschenrechner: $\cos 50° = 0{,}643.$

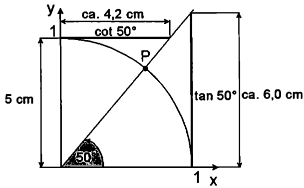


c) $\frac{6\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 1{,}2 \Rightarrow \tan 50° \approx 1{,}2$

Taschenrechner: $\tan 50° = 1{,}192.$

d) $\frac{4{,}2\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 0{,}84;$

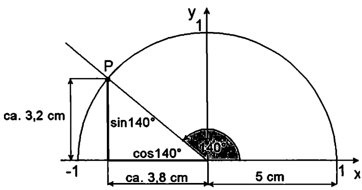
Taschenrechner: $\cot 50° = \frac{1}{\tan 50°} = 0{,}839.$



e) $\frac{3{,}2\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 0{,}64 \Rightarrow \sin 140° \approx 0{,}64;$

Taschenrechner: $\sin 140° = 0{,}643.$

f) $\frac{3{,}8\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 0{,}76;$ da der Kosinus von 140° jedoch negativ ist (Kreisfunktionswerte sind Koordinaten!), gilt: $\cos 140° \approx -0{,}76;$
Taschenrechner: $\cos 140° = -0{,}766$



g) Tangente an der 1–Marke der x–Achse zur vorzeichenrichtigen Anzeige von tan 140°!

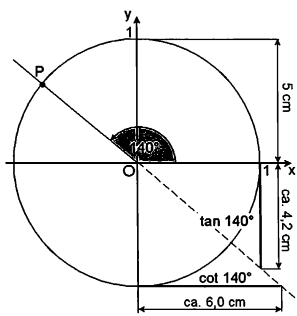
$\frac{4{,}2\ \text{cm}}{5\ \text{cm}} = 0{,}84 \Rightarrow \tan 140° \approx -0{,}84;$

Taschenrechner: $\tan 140° = -0{,}839$

h) Wegen $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$ muss der Strahl von O nach P wie beim tan 140° nach hinten verlängert werden!

$\frac{6{,}0\ \text{cm}}{5\ \text{cm}} = 1{,}2 \Rightarrow \cot 140° \approx -1{,}2;$

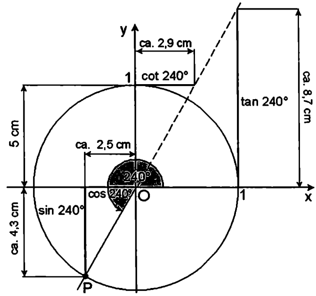
Taschenrechner: $\tan 140° = \frac{1}{\tan 140°} \approx -1{,}192$



5.1 **i)** $\frac{4{,}3 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 0{,}86$; da der Sinus von 240° jedoch negativ ist (Kreisfunktionswerte sind Koordinaten!), gilt: $\sin 240° \approx -0{,}86$;
Taschenrechner: $\sin 240° = -0{,}866$

j) $\frac{2{,}5 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 0{,}5$;
da der Kosinus von 240° jedoch negativ ist, gilt: $\cos 240° \approx -0{,}5$;
Taschenrechner: $\cos 240° = -0{,}5$

k) Tangente an der 1–Marke der x–Achse zur vorzeichenrichtigen Anzeige von tan 240°!
$\frac{8{,}7 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 1{,}7 \Rightarrow \tan 240° \approx -1{,}7$;
Taschenrechner: $\tan 240° = -1{,}732$



l) Wegen $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$ muss der Strahl von O nach P wie beim tan 240° nach hinten verlängert werden! $\frac{2{,}9 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 0{,}58 \Rightarrow \cot 240° \approx -0{,}58$;

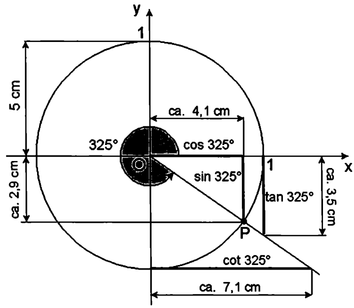
Taschenrechner: $\cot 240° = \frac{1}{\tan 240°} \approx -1{,}192$

m) $\frac{2{,}9 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 0{,}58$; da der Sinus von 325° jedoch negativ ist, gilt: $\sin 325° \approx -0{,}58$;
Taschenrechner: $\sin 325° = -0{,}574$

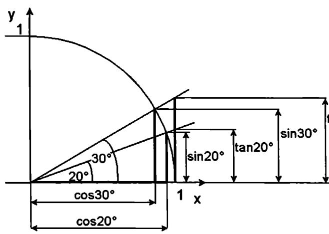
n) $\frac{4{,}1 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 0{,}82 \Rightarrow \cos 325° \approx 0{,}82$;
Taschenrechner: $\cos 325° = 0{,}819$

o) $\frac{3{,}5 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 0{,}70$; da der Tangens von 325° jedoch negativ ist, gilt: $\tan 325° \approx -0{,}70$;
Taschenrechner: $\tan 325° = -0{,}700$

p) $\frac{7{,}1 \text{ cm}}{5 \text{ cm}} = 1{,}42$; da der Kotangens von 325° jedoch negativ ist, gilt: $\cot 325° \approx -1{,}42$;
Taschenrechner: $\cot 325° = \frac{1}{\tan 325°} = -1{,}248$



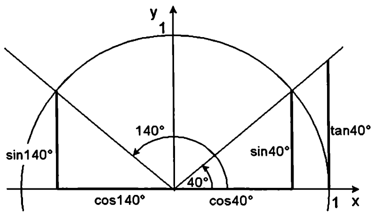
5.2 **a)** sin20° < sin30°
b) cos20° > cos30°
c) tan20° < tan30°



5.2 **d)** $\sin 40° < \tan 40°$

e) $\sin 40° = \sin 140°$

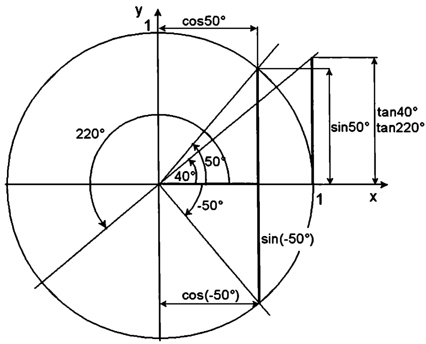
f) $\cos 40° > \cos 140°$,
da $\cos 140° < 0$;
$\cos 140° = -\cos 40°$



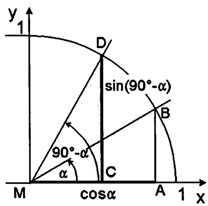
g) $\sin 50° > \sin(-50°)$,
$\sin(-50°) = -\sin 50°$

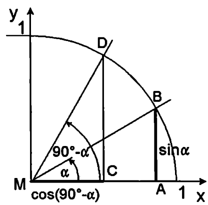
h) $\cos 50° = \cos(-50°)$

i) $\tan 40° = \tan 220°$

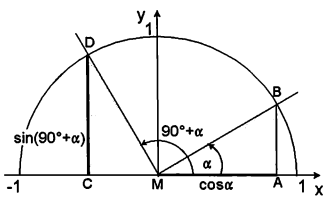


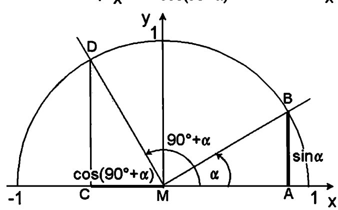
5.3 **a)** Die Dreiecke MAB und MCD sind deckungsgleich;
daher sind
$\overline{CD} = \sin(90°-\alpha)$ und $\overline{MA} = \cos\alpha$
gleich sowie
$\overline{MC} = \cos(90° - \alpha)$ und $\overline{AB} = \sin\alpha$
gleich.





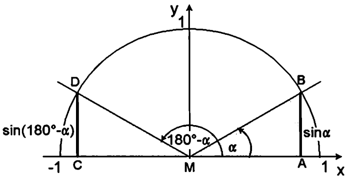
b)

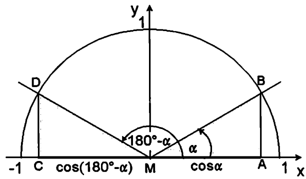




Die Dreiecke MAB und MCD sind deckungsgleich; daher sind $\overline{CD}$ und $\overline{MA}$ gleich:
$\sin(90°+\alpha) = \cos\alpha$.
Ebenso sind $\overline{CM}$ und $\overline{AB} = \sin\alpha$ gleich. $\overline{CM}$ ist gleich dem *Betrag* von $\cos(90°+\alpha)$, $\cos(90°+\alpha)$ ist als x-Koordinate von D negativ: $\cos(90°+\alpha) = -\sin\alpha$.

5.3 c)

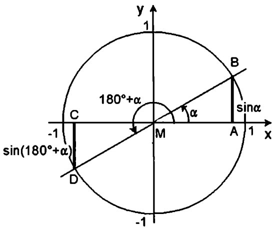


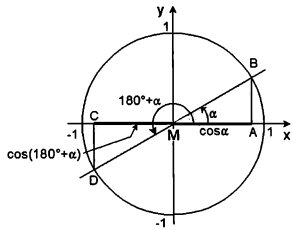


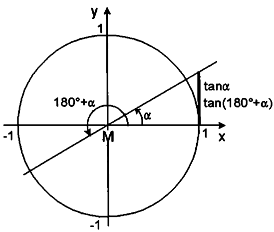
Die Dreiecke MAB und MCD sind deckungsgleich; daher sind $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$: sin (180°–α) = sin α.

Ebenso sind $\overline{MA}$ = cos α und $\overline{MC}$ gleich. $\overline{MC}$ ist gleich dem *Betrag* von cos (180°–α), cos (180°–α) ist als x-Koordinate von D negativ: cos (180°–α) = - cos α.

5.4 a)





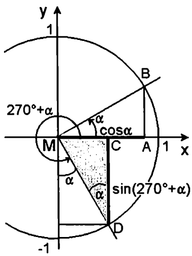


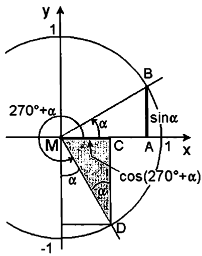
Die Dreiecke MAB und MCD sind deckungsgleich; daher sind $\overline{AB}$ = sin α und $\overline{CD}$ gleich. $\overline{CD}$ ist gleich dem *Betrag* von sin (180°+α); sin (180°+α) ist als y-Koordinate von D negativ: sin (180°+α) = – sin α.

Auch $\overline{CM}$ und $\overline{MA}$ = cos α sind gleich. $\overline{CM}$ ist gleich dem Betrag von cos (180°+α); cos (180°+α) ist als x-Koordinate von D negativ: cos (180°+α) = – cos α.

Tangente an der 1–Marke der x–Achse zur vorzeichenrichtigen Anzeige von tan (180°+α)! Daraus unmittelbar tan(180°+α) = tan α.

b)

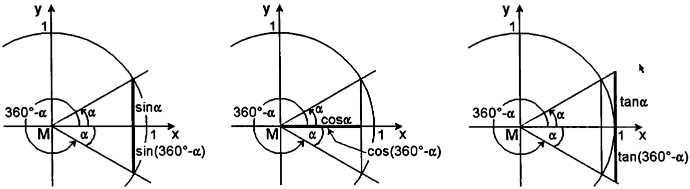




Die Dreiecke MAB und MDC sind deckungsgleich; daher sind $\overline{MA}$ = cos α und $\overline{CD}$ gleich. $\overline{CD}$ ist gleich dem Betrag von sin (270°+α); sin (270°+α) ist als x–Koordinate von D negativ: sin (270°+α)= – cos α.

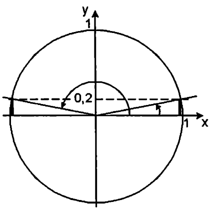
Ebenso sind $\overline{MC}$ und $\overline{AB}$ gleich, also auch cos (270°+α)= sin α.

5.4 c)



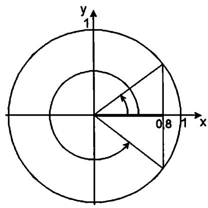
Aus den Abbildungen liest man unmittelbar ab (Vorzeichen beachten, die Kreisfunktionswerte sind Koordinaten von Punkten am Einheitskreis!):
$\sin(360°-\alpha) = -\sin\alpha$; $\cos(360°-\alpha) = \cos\alpha$; $\tan(360°-\alpha) = \tan\alpha$

5.5 a)



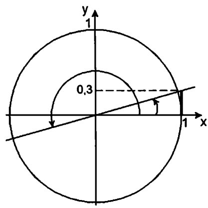
Im 1. oder 2. Quadranten

b)



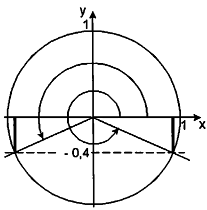
Im 1. oder 4. Quadranten

c)



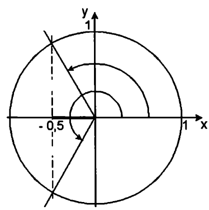
Im 1. oder 3. Quadranten

d)



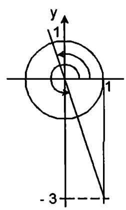
Im 3. oder 4. Quadranten

e)



Im 2. oder 3. Quadranten

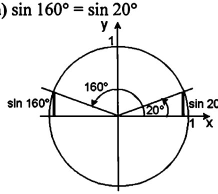
f)



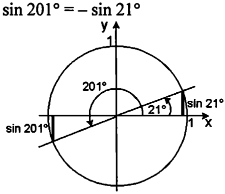
Im 2. oder 4. Quadranten

5.6 Die Zurückführung auf Kreisfunktionswerte spitzer Winkel entnimmt man der Abbildung. Dabei ist auf das Vorzeichen zu achten!

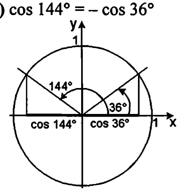
a) $\sin 160° = \sin 20°$



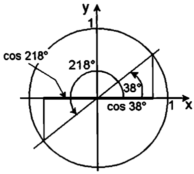
b) $\sin 201° = -\sin 21°$



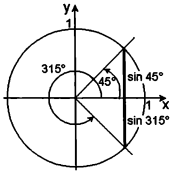
c) $\cos 144° = -\cos 36°$



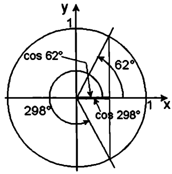
5.6 **d)** $\cos 218° = -\cos 38°$



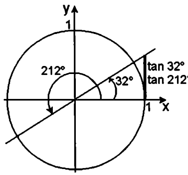
e) $\sin 315° = -\sin 45°$



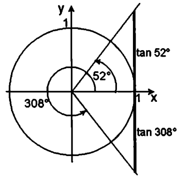
f) $\cos 298° = \cos 62°$



g) $\tan 212° = \tan 32°$



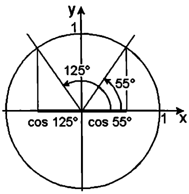
h) $\tan 308° = -\tan 52°$



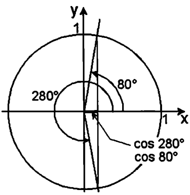
i) $\sin 400° = \sin(40° + 360°) =$
$= \sin 40°$

j) $\sin 520° = \sin(60° + 360°) =$
$= \sin 60°$

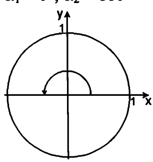
k) $\cos 485° = \cos(125° + 360°) =$
$= \cos 125° = -\cos 55°$



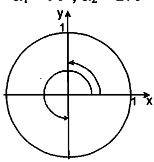
l) $\cos 1000° = \cos(280° + 2 \cdot 360°) =$
$= \cos 280° = \cos 80°$



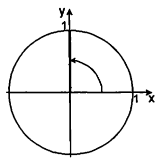
5.7 **a)** $\sin\alpha = 0 \Rightarrow$
$\alpha_1 = 0°, \alpha_2 = 180°$



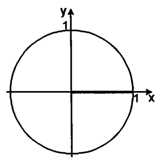
b) $\cos\alpha = 0 \Rightarrow$
$\alpha_1 = 90°, \alpha_2 = 270°$



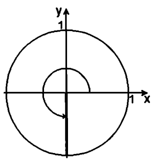
c) $\sin\alpha = 1 \Rightarrow$
$\alpha = 90°$



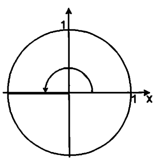
d) $\cos\alpha = 1 \Rightarrow$
$\alpha = 0°$



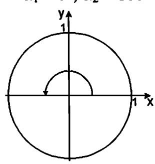
e) $\sin\alpha = -1 \Rightarrow$
$\alpha = 270°$



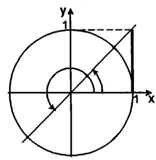
f) $\cos\alpha = -1 \Rightarrow$
$\alpha = 180°$



g) $\tan\alpha = 0 \Rightarrow$
$\alpha_1 = 0°, \alpha_2 = 180°$



h) $\tan\alpha = 1 \Rightarrow$
$\alpha_1 = 45°, \alpha_2 = 225°$



5.8 **$\sin\alpha = \sin(180° - \alpha)$; $\sin\alpha = \sin(360° + \alpha)$; $\cos\alpha = \cos(360° - \alpha)$; $\tan\alpha = \tan(\alpha + 180°)$**

a) $\sin\alpha = 0{,}32 \Rightarrow \alpha_1 = 18{,}7°$; $\alpha_2 = 180° - \alpha_1 = 161{,}3°$

b) $\sin\alpha = 0{,}67 \Rightarrow \alpha_1 = 42{,}1°$; $\alpha_2 = 180° - \alpha_1 = 137{,}9°$

c) $\cos\alpha = 0{,}86 \Rightarrow \alpha_1 = 30{,}7°$; $\alpha_2 = 360° - \alpha_1 = 329{,}3°$

d) $\sin\alpha = -0{,}44 \Rightarrow \alpha^* = -26{,}1°$ mit Taschenrechner, α^* jedoch nicht zwischen 0° und 360°:
$\alpha_1 = 360° + \alpha^* = 333{,}9°$; $\alpha_2 = 180° - \alpha^* = 206{,}1°$ (da $\sin\alpha^* = \sin(180° - \alpha^*)$)

e) $\cos\alpha = -0{,}17 \Rightarrow \alpha_1 = 99{,}8°$; $\alpha_2 = 360° - \alpha_1 = 260{,}2°$

f) $\tan\alpha = 1{,}92 \Rightarrow \alpha_1 = 62{,}5°$; $\alpha_2 = \alpha_1 + 180° = 242{,}5°$

g) $\tan\alpha = -0{,}35 \Rightarrow \alpha^* = -19{,}3°$ mit Taschnrechner, α^* jedoch nicht zwischen 0° und 360°:
$\alpha_1 = \alpha^* + 180° = 160{,}7°$, $\alpha_2 = \alpha_1 + 180° = 340{,}7°$

5.9 **$\sin x = (\pi - x)$; $\sin x = (2\pi + x)$; $\cos x = \cos(2\pi - x)$; $\tan x = \tan(x + \pi)$**

a) $\sin x = 0{,}44 \Rightarrow x_1 = 0{,}456$; $x_2 = \pi - x_1 = 2{,}686$

b) $\sin x = 0{,}70 \Rightarrow x_1 = 0{,}775$; $x_2 = \pi - x_1 = 2{,}366$

c) $\cos x = 0{,}81 \Rightarrow x_1 = 0{,}627$; $x_2 = 2\pi - x_1 = 5{,}657$

d) $\sin x = -0{,}39 \Rightarrow x^* = -0{,}401$ mit Taschenrechner, x^* jedoch nicht zwischen 0 und 2π:
$x_1 = 2\pi + x^* = 5{,}883$; $x_2 = \pi - x^* = 3{,}542$ (da $\sin x^* = \sin(\pi - x^*)$)

e) $\cos x = -0{,}75 \Rightarrow x_1 = 2{,}419$; $x_2 = 2\pi - x_1 = 3{,}864$

f) $\tan x = 4{,}22 \Rightarrow x_1 = 1{,}338$; $x_2 = x_1 + \pi = 4{,}480$

g) $\tan x = -0{,}80 \Rightarrow x^* = -0{,}675$ mit Taschenrechner, x^* jedoch nicht zwischen 0 und 2π:
$x_1 = x^* + \pi = 2{,}467$; $x_2 = x_1 + \pi = 5{,}608$

5.10 In a) bis h) hilft es, sich das Problem am Einheitskreis vorzustellen oder eine diesbezügliche Skizze anzufertigen, wobei $\pi = 180°$ sowie $\pi/2 = 90°$:

a) $\sin(\pi - x) = \sin x$ **b)** $\cos(\pi - x) = -\cos x$ **c)** $\sin(\pi + x) = -\sin x$

d) $\cos(\pi + x) = -\cos x$ **e)** $\sin(x + \pi/2) = \cos x$ **f)** $\cos(x + \pi/2) = -\sin x$

g) $\sin(\pi/2 - x) = \cos x$ **h)** $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$

Die folgenden Rechnungen machen auch Gebrauch von der Periodizität der Kreisfunktionen:

i) $\sin(x + 3\pi) = \sin[(x + \pi) + 2\pi] = \sin(x + \pi) = -\sin x$

j) $\cos(x + 3\pi) = \cos[(x + \pi) + 2\pi] = \cos(x + \pi) = -\cos x$

k) $\sin(x + 5\pi) = \sin[(x + \pi) + 4\pi] = \sin(x + \pi) = -\sin x$

l) $\sin(x - 2\pi) = \sin x$ **m)** $\cos(x - 2\pi) = \cos x$ **n)** $\tan(x + \pi) = \tan x$

o) $\tan(x - \pi) = \tan x$ **p)** $\tan(x + 3\pi) = \tan x$

5.11 **a)** $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$; $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3/5}{4/5} = \frac{3}{4}$

b) $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$; $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{12/13}{5/13} = \frac{12}{5}$

c) $\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{3/4}{\sqrt{1+(3/4)^2}} = \frac{3/4}{5/4} = \frac{3}{5}$; $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+(3/4)^2}} = \frac{4}{5}$

d) $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$; $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}} = 1$

e) $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{2}$; $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1/2}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

f) $\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$

5.12 **a)** $\dfrac{\sin\alpha}{\tan\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\cos\alpha$ **b)** $\dfrac{\cos\alpha}{\cot\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\sin\alpha$

c) $\tan\alpha\cdot\cot\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=1$ **d)** $\tan\alpha\cdot\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos\alpha=\sin\alpha$

e) $\cot\alpha\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\sin\alpha=\cos\alpha$

f) $$\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2}}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\sqrt{\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{1}{\cos\alpha}}=\sin\alpha$$

g) $$\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}}=\frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}}=\frac{1}{\dfrac{1}{\cos\alpha}}=\cos\alpha$$

h) $\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$ **i)** $\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$

j) $$\sin\alpha\cdot\sqrt{1+\tan^2\alpha}=\sin\alpha\cdot\sqrt{1+\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2}=\sin\alpha\cdot\sqrt{\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\sin\alpha\cdot\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$$

k) $$\frac{\cos\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{\cos\alpha}{1+\left(\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2}=\frac{\cos\alpha}{\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\cos\alpha}{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}=\cos^3\alpha$$

l) $$\frac{\sin\alpha}{1+\cot^2\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\left(\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2}=\frac{\sin\alpha}{\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{\dfrac{1}{\sin^2\alpha}}=\sin^3\alpha$$

5.13 **a)** $c=\sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma}=37{,}0\text{ mm}$; $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{c}{\sin\gamma}\Rightarrow\alpha=76{,}1°$; $\beta=180°-\alpha-\gamma=50{,}9°$;

$A=\dfrac{a\cdot b}{2}\cdot\sin\gamma=647\text{ mm}^2$

b) $\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}\Rightarrow\beta=16{,}1°$; $\alpha=180°-\beta-\gamma=145{,}9°$; $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{c}{\sin\gamma}\Rightarrow a=90{,}8\text{ mm}$;

$A=\dfrac{a\cdot b}{2}\cdot\sin\gamma=631\text{ mm}^2$

c) $b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta\Rightarrow\beta=123{,}2°$; $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}\Rightarrow\alpha=29{,}6°$;

$\gamma=180°-\alpha-\beta=27{,}1°$; $A=\dfrac{a\cdot b}{2}\cdot\sin\gamma=1631\text{ mm}^2$

d) $\gamma=180°-\alpha-\beta=93°$; $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{c}{\sin\gamma}\Rightarrow a=45{,}1\text{ mm}$; $\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}\Rightarrow b=51{,}3\text{ mm}$;

$A=\dfrac{a\cdot b}{2}\cdot\sin\gamma=1153\text{ mm}^2$

e) $a=\sqrt{b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha}=80{,}4\text{ mm}$; $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{c}{\sin\gamma}\Rightarrow\gamma=22{,}4°$; $\beta=180°-\alpha-\gamma=107{,}6°$;

$A=\dfrac{a\cdot b}{2}\cdot\sin\gamma=1532\text{ mm}^2$

5.13 **f)** Da der gegebene Winkel der kleineren Seite gegenüberliegt, gibt es zwei Lösungen.

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow \alpha_1 = 38{,}7°;\quad \alpha_2 = 180° - \alpha_1 = 141{,}3°;\quad \gamma_1 = 180° - \alpha_1 - ß = 111{,}3°;$

$\gamma_2 = 180° - \alpha_2 - ß = 8{,}7°;\quad \frac{c_1}{\sin\gamma_1} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow c_1 = 74{,}5\,\text{mm};\quad \frac{c_2}{\sin\gamma_2} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow c_2 = 12{,}1\,\text{mm};$

$A_1 = \frac{a\cdot b}{2}\cdot\sin\gamma_1 = 932\,\text{mm}^2;\quad A_2 = \frac{a\cdot b}{2}\cdot\sin\gamma_2 = 151\,\text{mm}^2$

g) $A = \frac{b\cdot c}{2}\cdot\sin\alpha \Rightarrow \alpha = 57{,}7°;\; a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha} = 60{,}5\,\text{mm};$

$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha} \Rightarrow \beta = 44{,}3°;\; \gamma = 180° - \alpha - \beta = 77{,}9°$

h) $A = \frac{a\cdot c}{2}\cdot\sin ß \Rightarrow\; c = 93{,}0\,\text{mm};\; b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot\cos ß} = 90{,}9\,\text{mm};$

$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta} \Rightarrow \gamma = 69{,}3°;\; \alpha = 180° - ß - \gamma = 44{,}7°$

5.14 Dreiecke mit den Bestimmungsstücken in **a)** und **b)** sind nicht möglich:

a) Bei Anwendung des Sinussatzes erhält man: $\sin\alpha = 1{,}17$. $\sin\beta$ dürfte höchstens $40/50 = 0{,}8$ sein, also β höchstens $53{,}1°$.

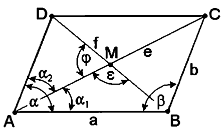
b) Die Summe zweier Dreiecksseiten muß größer als die dritte Seite sein (Dreiecksungleichung). Diese Bedingung ist hier nicht erfüllt.

5.15 **a)** (1) $\beta = 180° - \alpha = 145°$;

Dreieck ABC: $e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\beta} = 16{,}7\,\text{cm};$

Dreieck ABD: $f = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\alpha} = 9{,}0\,\text{cm};$

$A = a\cdot b\cdot\sin\alpha = 34{,}4\,\text{cm}^2;$



(2) Winkel zwischen den Diagonalen: Dreieck ABM:

$a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{e}{2}\cdot\frac{f}{2}\cdot\cos\varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 152{,}7°;\; \varphi = 180 - \varepsilon = 27{,}3°$

(3) Dreieck ABM: $\frac{f/2}{\sin\alpha_1} = \frac{a}{\sin\varepsilon} \Rightarrow \alpha_1 = 9{,}5° \neq \frac{\alpha}{2}$

b) (1) $\alpha = 180° - \beta = 124°$; Dreieck ABC: $e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\beta} = 16{,}3\,\text{cm};$

Dreieck ABD: $f = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\alpha} = 28{,}5\,\text{cm};$

$A = a\cdot b\cdot\sin\alpha = 201{,}5\,\text{cm}^2$

(2) Winkel zwischen den Diagonalen: Dreieck ABM: $a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{e}{2}\cdot\frac{f}{2}\cdot\cos\varepsilon$

$\Rightarrow \varepsilon = 119{,}8°;\; \varphi = 180 - \varepsilon = 60{,}2°$

(3) Dreieck ABM: $\frac{f/2}{\sin\alpha_1} = \frac{a}{\sin\varepsilon} \Rightarrow \alpha_1 = 39{,}1° \neq \frac{\alpha}{2}$

c) (1) $\beta = 180° - \alpha = 70°$; Dreieck ABC: $e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\beta} = 12{,}0\,\text{cm};$

Dreieck ABD: $f = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\alpha} = 15{,}9\,\text{cm};$

$A = a\cdot b\cdot\sin\alpha = 76{,}4\,\text{cm}^2$

(2) Winkel zwischen den Diagonalen: Dreieck ABM: $a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{e}{2}\cdot\frac{f}{2}\cdot\cos\varepsilon$

$\Rightarrow \varepsilon = 53{,}3°;\; \varphi = 180 - \varepsilon = 126{,}7°$ (3) Dreieck ABM: $\frac{f/2}{\sin\alpha_1} = \frac{a}{\sin\varepsilon} \Rightarrow \alpha_1 = 79{,}3° \neq \frac{\alpha}{2}$

5.15 **d)** (1) $\alpha = 180° - \beta = 57°$; Dreieck ABC: $e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\beta} = 42{,}9\ \text{cm}$;

Dreieck ABD: $f = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha} = 29{,}6\ \text{cm}$;

$A = a \cdot b \cdot \sin\alpha = 371{,}4\ \text{cm}^2$

(2) Winkel zwischen den Diagonalen: Dreieck ABM: $a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} \cdot \cos\varepsilon$

$\Rightarrow \varepsilon = 144{,}3°;\ \varphi = 180 - \varepsilon = 35{,}7°$

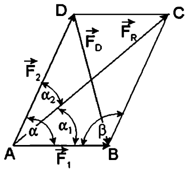
(3) $\dfrac{f/2}{\sin\alpha_1} = \dfrac{a}{\sin\varepsilon} \Rightarrow \alpha_1 = 14{,}5° \neq \dfrac{\alpha}{2}$

5.16 $\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2;\ \vec{F}_D = \vec{F}_1 - \vec{F}_2;\ \beta = 180° - \alpha$;

Dreieck ABC: $\left|\vec{F}_R\right| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\beta}$;

Dreieck ABD: $\left|\vec{F}_D\right| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\alpha}$;

Dreieck ABC: $\dfrac{F_2}{\sin\alpha_1} = \dfrac{F_R}{\sin\beta} \Rightarrow \alpha_1;\ \alpha_2 = \alpha - \alpha_1$



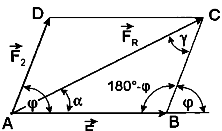
a) $\left|\vec{F}_R\right| = 42{,}5$ N; $\left|\vec{F}_D\right| = 28{,}2$ N; $\alpha_1 = 39{,}8°$; $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1 = 25{,}2°$

b) $\left|\vec{F}_R\right| = 215{,}9$ N; $\left|\vec{F}_D\right| = 296{,}6$ N; $\alpha_1 = 81{,}0°$; $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1 = 31{,}0°$

5.17 **a)** $\gamma = 180° - [\alpha + (180° - \varphi)] = 55°$;

Dreieck ABC: $\dfrac{F_2}{\sin\alpha} = \dfrac{F_1}{\sin\gamma} \Rightarrow F_2 = 12{,}5\text{N}$;

$\dfrac{F_R}{\sin(180° - \varphi)} = \dfrac{F_1}{\sin\gamma} \Rightarrow F_R = 35{,}4\ \text{N}$



b) $\gamma = 180° - [\alpha + (180° - \varphi)] = 60°$;

Dreieck ABC: $\dfrac{F_1}{\sin\gamma} = \dfrac{F_2}{\sin\alpha} \Rightarrow F_1 = F_2 = 95\ \text{N}$; $\dfrac{F_R}{\sin(180° - \varphi)} = \dfrac{F_2}{\sin\alpha} \Rightarrow F_R = F_2 = 95\ \text{N}$

c) $\gamma = 180° - [\alpha + (180° - \varphi)] = 48°$;

Dreieck ABC: $\dfrac{F_1}{\sin\gamma} = \dfrac{F_R}{\sin(180° - \varphi)} \Rightarrow F_1 = 85{,}1\ \text{N}$; $\dfrac{F_2}{\sin\alpha} = \dfrac{F_R}{\sin(180° - \varphi)} \Rightarrow F_2 = 127{,}9\ \text{N}$

d) Dreieck ABC: $\dfrac{F_2}{\sin\alpha} = \dfrac{F_R}{\sin(180° - \varphi)} \Rightarrow \alpha = 28{,}0°;\ \gamma = 180° - [\alpha + (180° - \varphi)] = 42{,}0°$;

$\dfrac{F_1}{\sin\gamma} = \dfrac{F_R}{\sin(180° - \varphi)} \Rightarrow F_1 = 284{,}7\ \text{N}$

5.18 Dreieck ABC:

$F_2^2 = F_1^2 + F_3^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_3 \cdot \cos\varphi \Rightarrow \varphi = 58{,}8°$

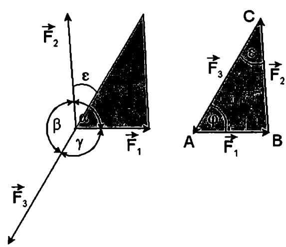
$\dfrac{F_1}{\sin\varepsilon} = \dfrac{F_2}{\sin\varphi} \Rightarrow \varepsilon = 34{,}8°$;

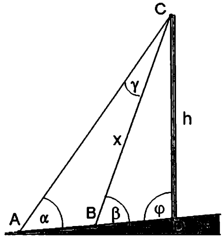
Winkel zwischn $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$: $\alpha = \varphi + \varepsilon = 93{,}6°$;

Winkel zwischen $\vec{F}_2$ und $\vec{F}_3$: $\beta = 180° - \varepsilon = 145{,}2°$;

Winkel zwischen $\vec{F}_3$ und $\vec{F}_1$: $\gamma = 180° - \varphi = 121{,}2°$;

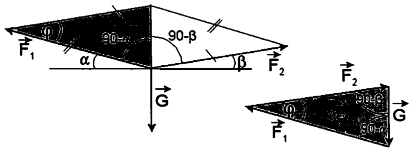
Kontrolle: 93,6° + 145,2° + 121,2° = 360°.



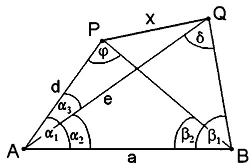


5.19 Höhenwinkel sind Winkel zur Waagrechten!
Innenwinkel des Dreiecks ABC:
$\alpha - \varepsilon = 50°$; $180° - (\beta - \varepsilon) = 115°$; $\gamma = 180° - 50° - 115° = 15°$;
Dreieck ABC: $\frac{x}{\sin 50°} = \frac{60}{\sin 15°} \Rightarrow x = 177{,}6 \text{ m}$
$\varphi = 90° + \varepsilon = 95°$;
Dreieck BDC: $\frac{x}{\sin\varphi} = \frac{h}{\sin(\beta-\varepsilon)} \Rightarrow h \approx 162 \text{ m}$

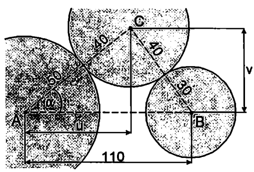
5.20 $\varphi = 180° - (90° - \alpha) - (90° - \beta) = \alpha + \beta$;
$\frac{F_1}{\sin(90°-\beta)} = \frac{G}{\sin\varphi} \Rightarrow F_1 \approx 168 \text{ N}$
$\frac{F_2}{\sin(90°-\alpha)} = \frac{G}{\sin\varphi} \Rightarrow F_2 \approx 164 \text{ N}$



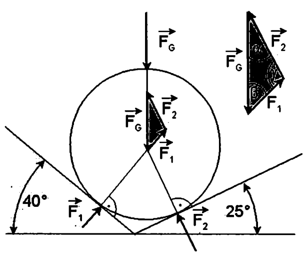
5.21 x kann aus dem Dreieck AQP mit Hilfe des Kosinussatzes bestimmt werden, wenn e und d bekannt sind:
Dreieck ABP: $\varphi = 180° - \alpha_1 - \beta_2 = 180° - 54° - 40° = 86°$;
$\frac{a}{\sin\varphi} = \frac{d}{\sin\beta_2} \Rightarrow d = 77{,}3 \text{ m}$;
Dreieck ABQ: $\delta = 180° - \alpha_2 - \beta_1 = 180° - 35° - 80° = 65°$.
$\frac{a}{\sin\delta} = \frac{e}{\sin\beta_1} \Rightarrow e = 130{,}4 \text{ m}$;
Dreieck AQP: $x^2 = d^2 + e^2 - 2 \cdot d \cdot e \cdot \cos\alpha_3 \Rightarrow x = 62{,}6 \text{ m}$



5.22 Kosinussatz im Dreieck ABC:
$70^2 = 90^2 + 110^2 - 2 \cdot 90 \cdot 110 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \alpha = 39{,}4°$;
$u = (50+40) \cdot \cos\alpha = 69{,}5 \text{ mm}$;
$v = (50-+40) \cdot \sin\alpha = 57{,}1 \text{ mm}$

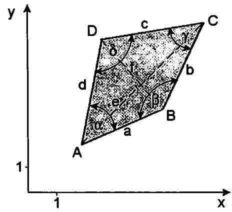


5.23 $\alpha = 25°$; $\beta = 40°$ (Normalenwinkel!);
$\gamma = 180° - \alpha .- \beta = 115°$;
$\frac{F_1}{\sin\alpha} = \frac{F_G}{\sin\gamma} \Rightarrow F_1 \approx 65 \text{ N}$;
$\frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{F_G}{\sin\gamma} \Rightarrow F_2 \approx 99 \text{ N}$



5.24 $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha} = 1{,}20\,\text{m}; \quad \frac{d}{2} = a \cdot \sin\beta = 0{,}8056 \Rightarrow d = 1{,}61\,\text{m}$

5.25 **a)** $a = \sqrt{(4-2)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{20}; \quad b = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29};$



$c = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}; \quad d = \sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{37};$

$e = \sqrt{6^2 + 7^2} = \sqrt{85}; \quad f = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5;$

$f^2 = a^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos\alpha \Rightarrow \alpha = 54{,}0;$

$e^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\beta \Rightarrow \beta = 138{,}4°;$

$f^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\gamma \Rightarrow \gamma = 56{,}9°$

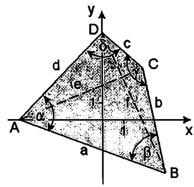
$e^2 = c^2 + d^2 - 2 \cdot c \cdot d \cdot \cos\delta \Rightarrow \delta = 110{,}8°;$

Kontrolle: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360{,}1°$ (Aweichung von 360° rundungsbedingt).

Flächeninhalt des Dreiecks ABD: $A_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot d \cdot \sin\alpha = 11{,}0;$

Flächeninhalt des Dreiecks BCD: $A_2 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\gamma = 11{,}5; \quad A = A_1 + A_2 = 22{,}5$

b) $a = \sqrt{(3-(-4))^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{58}; \quad b = \sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{37};$



$c = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}; \quad d = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41};$

$e = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}; \quad f = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73};$

$f^2 = a^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos\alpha \Rightarrow \alpha = 74{,}5;$

$e^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\beta \Rightarrow \beta = 57{,}3°;$

$f^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\gamma \Rightarrow \gamma = 144{,}5°$

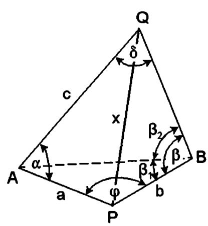
$e^2 = c^2 + d^2 - 2 \cdot c \cdot d \cdot \cos\delta \Rightarrow \delta = 83{,}7°;$

Kontrolle: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$.

Flächeninhalt des Dreiecks ABD: $A_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot d \cdot \sin\alpha = 23{,}5;$

Flächeninhalt des Dreiecks BCD: $A_2 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\gamma = 5{,}0; \quad A = A_1 + A_2 = 28{,}5$

5.26 Die Seite x kann aus dem Dreieck APQ berechnet werden. Dies kann mit Hilfe des Kosinus - Satzes erfolgen, wenn man noch die Seite c kennt.



Dreieck APB: $\overline{AB} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\varphi} = 164{,}6\,\text{m};$

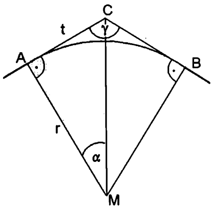
$\frac{a}{\sin\beta_1} = \frac{\overline{AB}}{\sin\varphi} \Rightarrow \beta_1 = 26{,}3°;$

$\beta_2 = 99° - \beta_1 = 72{,}7°$. $\delta = 360° - (81° + 132° + 99°) = 48°$ (Summe der Innenwinkel in einem Viereck ist 360°).

Dreieck ABQ: $\frac{c}{\sin\beta_2} = \frac{\overline{AB}}{\sin\delta} \Rightarrow c = 211{,}5\,\text{m}$

Dreieck APQ: $x^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\alpha \Rightarrow x = 218{,}7\,\text{m}$

5.27 Dreieck AMC:



$c = \overline{MC}$; $\alpha = 90° - \frac{\gamma}{2} = 19°$; $r = \frac{t}{\tan\alpha} \approx 453{,}1\,\text{m}$;

$c = \frac{t}{\sin\alpha} \approx 479{,}2\,\text{m}$; $\overline{CD} = c - r = 26{,}1\,\text{m}$

$b = AB = \frac{\pi}{180} \cdot r \cdot 2\alpha \approx 300{,}5\,\text{m}$

5.28 **a)** $\sin(90° - \alpha) = \sin 90° \cdot \cos\alpha - \cos 90° \cdot \sin\alpha = 1 \cdot \cos\alpha - 0 \cdot \sin\alpha = \cos\alpha$

b) $\cos(90° - \alpha) = \cos 90° \cdot \cos\alpha + \sin 90° \cdot \sin\alpha = 0 \cdot \cos\alpha + 1 \cdot \sin\alpha = \sin\alpha$

c) $\sin(180° + \alpha) = \sin 180° \cdot \cos\alpha + \cos 180° \cdot \sin\alpha = 0 \cdot \cos\alpha + (-1) \cdot \sin\alpha = -\sin\alpha$

d) $\cos(180° + \alpha) = \cos 180° \cdot \cos\alpha - \sin 180° \cdot \sin\alpha = (-1) \cdot \cos\alpha - 0 \cdot \sin\alpha = -\cos\alpha$

e) $\tan(180° - \alpha) = \frac{\sin(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{\sin 180° \cdot \cos\alpha - \cos 180° \cdot \sin\alpha}{\cos 180° \cdot \cos\alpha + \sin 180° \cdot \sin\alpha} = \frac{0 \cdot \cos\alpha - (-1) \cdot \sin\alpha}{(-1) \cdot \cos\alpha + 0 \cdot \sin\alpha} = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$

f) $\sin(90° + \alpha) = \sin 90° \cdot \cos\alpha + \cos 90° \cdot \sin\alpha = 1 \cdot \cos\alpha + 0 \cdot \cos\alpha = \cos\alpha$

5.29 **a)** $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin x \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{2} = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$

b) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cdot \cos\frac{\pi}{2} - \sin x \cdot \sin\frac{\pi}{2} = \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x$

c) $\sin(x - \pi) = \sin x \cdot \cos\pi - \cos x \cdot \sin\pi = \sin x \cdot (-1) - \cos x \cdot 0 = -\sin x$

d) $\cos(x - \pi) = \cos x \cdot \cos\pi + \sin x \cdot \sin\pi = \cos x \cdot (-1) + \sin x \cdot 0 = -\cos x$

e) $\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{\sin x \cdot \cos\pi - \cos x \cdot \sin\pi}{\cos x \cdot \cos\pi - \sin x \cdot \sin\pi} = \frac{\sin x \cdot (-1) - (\cos x) \cdot 0}{\cos x \cdot (-1) - (\sin x) \cdot 0} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

f) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2} \cdot \cos x + \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin x = 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x = \sin x$

5.30 **a)** $\frac{\sin(2\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha} = 2 \cdot \cos\alpha$

b) $\frac{1 - \cos(2\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \frac{1 - \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right)}{-\sin\alpha} = \frac{1 - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{-\sin\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \sin^2\alpha}{-\sin\alpha} = -2 \cdot \sin\alpha$

c) $\frac{\sin(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)} = \frac{2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{1 + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{1 + \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha)} = \frac{2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{2 \cdot \cos^2\alpha} = \tan\alpha$

d) $\left(1 + \cos(2\alpha)\right) \cdot \left(1 + \tan^2\alpha\right) = \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) \cdot \left(1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right) =$

$= 2 \cdot \cos^2\alpha \cdot \left(\frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right) = 2 \cdot \cos^2\alpha \cdot \frac{1}{\cos^2\alpha} = 2$

e) $\left(1 - \cos(2\alpha)\right) \cdot \left(1 + \cot^2\alpha\right) = \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\right) \cdot \left(1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right) =$

$= 2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \left(\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right) = 2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \frac{1}{\sin^2\alpha} = 2$

5.31 **a)** $\sin(300°-\alpha)-\cos(150°+\alpha)=$

$=\sin 300°\cdot\cos\alpha-\cos 300°\cdot\sin\alpha-(\cos 150°\cdot\cos\alpha-\sin 150°\cdot\sin\alpha)=$

$=\sin(360°-60°)\cdot\cos\alpha-\cos(360°-60°)\cdot\sin\alpha+$

$-\cos(180°-30°)\cdot\cos\alpha+\sin(180°-30°)\cdot\sin\alpha=$

$=(\sin 360°\cdot\cos 60°-\cos 360°\cdot\sin 60°)\cdot\cos\alpha-(\cos 360°\cdot\cos 60°+\sin 360°\cdot\sin 60°)\cdot\sin\alpha+$

$-(\cos 180°\cdot\cos 30°+\sin 180°\cdot\sin 30°)\cdot\cos\alpha+(\sin 180°\cdot\cos 30°-\cos 180°\cdot\sin 30°)\cdot\sin\alpha=$

$=(0\cdot\cos 60°-1\cdot\sin 60°)\cdot\cos\alpha-(1\cdot\cos 60°+0\cdot\sin 60°)\cdot\sin\alpha+$

$-((-1)\cdot\cos 30°+0\cdot\sin 30°)\cdot\cos\alpha+(0\cdot\cos 30°-(-1)\cdot\sin 30°)\cdot\sin\alpha=$

$=-\sin 60°\cdot\cos\alpha-\cos 60°\cdot\sin\alpha+\cos 30°\cdot\cos\alpha+\sin 30°\cdot\sin\alpha=$

$/\cos 60°=\sin(90°-60°)=\sin 30°,\quad \cos 30°=\sin(90°-30°)=\sin 60°/$

$=-\sin 60°\cdot\cos\alpha-\sin 30°\cdot\sin\alpha+\sin 60°\cdot\cos\alpha+\sin 30°\cdot\sin\alpha=0$

b) $\cos(300°+\alpha)+\sin(150°+\alpha)=$

$=\cos 300°\cdot\cos\alpha-\sin 300°\cdot\sin\alpha+\sin 150°\cdot\cos\alpha+\cos 150°\cdot\sin\alpha=$

$=\cos(360°-60°)\cdot\cos\alpha-\sin(360°-60°)\cdot\sin\alpha+$

$+\sin(180°-30°)\cdot\cos\alpha+\cos(180°-30°)\cdot\sin\alpha=$

$=(\cos 360°\cdot\cos 60°-\sin 360°\cdot\sin 60°)\cdot\cos\alpha-(\sin 360°\cdot\cos 60°-\cos 360°\cdot\sin 60°)\cdot\sin\alpha+$

$+(\sin 180°\cdot\cos 30°-\cos 180°\cdot\sin 30°)\cdot\cos\alpha+(\cos 180°\cdot\cos 30°+\sin 180°\cdot\sin 30°)\cdot\sin\alpha=$

$=(1\cdot\cos 60°-0\cdot\sin 60°)\cdot\cos\alpha-(0\cdot\cos 60°-1\cdot\sin 60°)\cdot\sin\alpha+$

$+(0\cdot\cos 30°-(-1)\cdot\sin 30°)\cdot\cos\alpha+(-1\cdot\cos 30°+0\cdot\sin 30°)\cdot\sin\alpha=$

$=\cos 60°\cdot\cos\alpha+\sin 60°\cdot\sin\alpha+\sin 30°\cdot\cos\alpha-\cos 30°\cdot\sin\alpha=$

$/\cos 60°=\sin(90°-60°)=\sin 30°,\quad \cos 30°=\sin(90°-30°)=\sin 60°/$

$=\sin 30°\cdot\cos\alpha+\sin 60°\cdot\sin\alpha+\sin 30°\cdot\cos\alpha-\sin 60°\cdot\sin\alpha=2\cdot\sin 30°\cdot\cos\alpha=$

$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos\alpha=\cos\alpha$

c) $\dfrac{\sin(180°+\alpha)}{\sin(270°+\alpha)}=\dfrac{\sin 180°\cdot\cos\alpha+\cos 180°\cdot\sin\alpha}{\sin 270°\cdot\cos\alpha+\cos 270°\cdot\sin\alpha}=\dfrac{0\cdot\cos\alpha+(-1)\cdot\sin\alpha}{(-1)\cdot\cos\alpha+0\cdot\sin\alpha}=\tan\alpha$

d) $\sin\alpha+\sin(\alpha+120°)+\sin(\alpha+240°)=$

$=\sin\alpha+\sin\alpha\cdot\cos 120°+\cos\alpha\cdot\sin 120°+\sin\alpha\cdot\cos 240°+\cos\alpha\cdot\sin 240°=$

$=\sin\alpha+\sin\alpha\cdot\cos(180°-60°)+\cos\alpha\cdot\sin(180°-60°)+$

$+\sin\alpha\cdot\cos(180°+60°)+\cos\alpha\cdot\sin(180°+60°)=$

$=\sin\alpha+\sin\alpha\cdot(-\cos 60°)+\cos\alpha\cdot\sin 60°+\sin\alpha\cdot(-\cos 60°)+\cos\alpha\cdot(-\sin 60°)=$

$=\sin\alpha-\sin\alpha\cdot\cos 60°+\cos\alpha\cdot\sin 60°-\sin\alpha\cdot\cos 60°-\cos\alpha\cdot\sin 60°=$

$=\sin\alpha-2\cdot\sin\alpha\cdot\cos 60°=\sin\alpha-2\cdot(\sin\alpha)\cdot\frac{1}{2}=0$

e) $\tan(45°+\alpha)\cdot\tan(45°-\alpha)=\dfrac{\tan 45°+\tan\alpha}{1-\tan 45°\cdot\tan\alpha}\cdot\dfrac{\tan 45°-\tan\alpha}{1+\tan 45°\cdot\tan\alpha}=\dfrac{1+\tan\alpha}{1-1\cdot\tan\alpha}\cdot\dfrac{1-\tan\alpha}{1+1\cdot\tan\alpha}=1$

5.32 **a)** $\cos(60°+\alpha)+\cos(60°-\alpha)=\cos 60°\cdot\cos\alpha-\sin 60°\cdot\sin\alpha+\cos 60°\cdot\cos\alpha+\sin 60°\cdot\sin\alpha=$

$=2\cdot\cos 60°\cdot\cos\alpha=2\cdot\sin 30°\cdot\cos\alpha=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos\alpha=\cos\alpha$

Lösungsvariante 2. Summensatz: $\cos(60°+\alpha)+\cos(60°-\alpha)=$

$=2\cdot\cos\dfrac{60°+\alpha+60°-\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{60°+\alpha-(60°-\alpha)}{2}=2\cdot\cos 60°\cdot\cos\alpha=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos\alpha=\cos\alpha$

5.32 **b)** $\sin(30°+\alpha)-\sin(30°-\alpha)=2\cdot\cos\frac{30°+\alpha+30°-\alpha}{2}\cdot\sin\frac{30°+\alpha-(30°-\alpha)}{2}=$

$=2\cdot\cos 30°\cdot\sin\alpha=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sin\alpha=\sqrt{3}\cdot\sin\alpha$

Lösung auch mit Hilfe des 1. Summensatzes

c) $\sin(\alpha+60°)+\sin(\alpha-60°)=\sin\alpha\cdot\cos 60°+\cos\alpha\cdot\sin 60°+\sin\alpha\cdot\cos 60°-\cos\alpha\cdot\sin 60°=;$

$= 2\cdot\cos 60°\cdot\sin\alpha = 2\cdot\sin 30°\cdot\sin\alpha = 2\cdot 0{,}5\cdot\sin\alpha = \sin\alpha$. Lösung auch mit 2. Summensatz

d) Lösung mit 2. Summensatz: (von rechts nach links gelesen):

$2\cdot\sin\frac{90°+\alpha}{2}\cdot\cos\frac{90°-\alpha}{2}=\sin 90°+\sin\alpha=1+\sin\alpha$; Lösung mit 1. Summensatz:

$$2\cdot\sin\frac{90°+\alpha}{2}\cdot\cos\frac{90°-\alpha}{2}=2\cdot\sin\left(45°+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=2\cdot\left(\sin 45°\cdot\cos\frac{\alpha}{2}+\cos 45°\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(\cos 45°\cdot\cos\frac{\alpha}{2}+\sin 45°\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2=1\cdot\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=1+2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}=1+\sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right)=1+\sin\alpha$$

e) $\tan(45°+\alpha)=\frac{\tan 45°+\tan\alpha}{1-\tan 45°\cdot\tan\alpha}=\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$ **f)** $\tan(45°-\alpha)=\frac{\tan 45°-\tan\alpha}{1+\tan 45°\cdot\tan\alpha}=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$

5.33 **a)** $\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha-(1-\cos^2\alpha)=2\cdot\cos^2\alpha-1 \Rightarrow \cos^2\alpha=\frac{1}{2}\cdot[1+\cos(2\alpha)]$

b) $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha=1+2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=1+\sin(2\alpha)$

c) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha-2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha=1-2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=1-\sin(2\alpha)$

d) $$\frac{2\cdot\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\frac{2\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{1}{\cos^2\alpha}}=\frac{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin(2\alpha)$$

e) $$\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{1}=\cos(2\alpha)$$

f) $\tan\alpha+\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{2}{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{2}{\sin(2\alpha)}$

g) $\tan\alpha-\cot\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\frac{-2\cdot(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=-\frac{2\cdot\cos(2\alpha)}{\sin(2\alpha)}=-\frac{2}{\tan(2\alpha)}$

h) $\frac{\cos(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{1+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{2\cdot\cos^2\alpha}=\frac{1}{2}\cdot\left(1-\tan^2\alpha\right)$

i) $$\frac{\cot\alpha-\tan\alpha}{\cot\alpha+\tan\alpha}=\frac{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}}=\frac{\frac{\cos(2\alpha)}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}}{\frac{1}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}}=\cos(2\alpha)$$

j) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\cdot\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)=\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\cdot 1=\cos(2\alpha)$

5.34 $\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x\cdot\cos x + \cos 2x\cdot\sin x = 2\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot\cos x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\cdot\sin x =$
$= 3\cdot\sin x\cdot\cos^2 x - \sin^3 x = 3\cdot\sin x\cdot(1 - \sin^2 x) - \sin^3 x = 3\cdot\sin x - 4\cdot\sin^3 x$

5.35 **a)** $\dfrac{1-\cos 2\beta}{\sin 2\beta} = \dfrac{1-(\cos^2\beta-\sin^2\beta)}{2\sin\beta\cdot\cos\beta} = \dfrac{2\sin^2\beta}{2\sin\beta\cdot\cos\beta} = \tan\beta = \tan\dfrac{\alpha}{2}$

b) $\dfrac{1-\cos 2\beta}{2\sin\beta} = \dfrac{1-(\cos^2\beta-\sin^2\beta)}{2\sin\beta} = \dfrac{2\sin^2\beta}{2\sin\beta} = \sin\beta = \sin\dfrac{\alpha}{2}$

5.36 **a)** $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} = \dfrac{2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ **b)** $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} = \dfrac{2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \tan\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

c) $\dfrac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\beta-\frac{\pi}{4}\right)} = -\dfrac{2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}{2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)} = -\tan\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right) =$

$= -\dfrac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}+\tan\frac{\pi}{2}}{1-\tan\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\tan\frac{\pi}{2}} = -\dfrac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}+1}{1-\left(\tan\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot 1} = \dfrac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}+1}{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}-1}$

5.37 **a)** $\sin\alpha+\sin(3\alpha) = 2\cdot\sin\dfrac{\alpha+3\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-3\alpha}{2} = 2\cdot\sin(2\alpha)\cdot\cos(-\alpha) = 2\cdot\sin(2\alpha)\cdot\cos\alpha$

b) $\cos\alpha+\cos(3\alpha) = 2\cdot\cos\dfrac{\alpha+3\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-3\alpha}{2} = 2\cdot\cos(2\alpha)\cdot\cos(-\alpha) = 2\cdot\cos(2\alpha)\cdot\cos\alpha$

5.38 $\cos\alpha = \sin(\alpha+90°)$; $\sin\alpha+\cos\alpha = \sin\alpha+\sin(\alpha+90°) = 2\cdot\sin\dfrac{\alpha+\alpha+90°}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-(\alpha+90°)}{2} =$

$= 2\cdot\sin(\alpha+45°)\cdot\cos(-45°) = 2\cdot\sin(\alpha+45°)\cdot\cos 45° = 2\cdot\sin(\alpha+45°)\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\cdot\sin(\alpha+45°)$

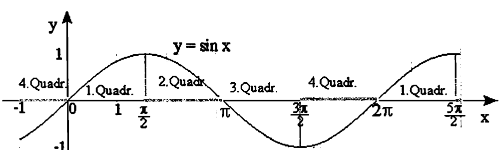
5.39 **a)** $20°\cdot\dfrac{\pi}{180°} = 0{,}349$ **b)** $0{,}48\cdot\dfrac{180°}{\pi} = 27{,}5°$ **c)** $1\cdot\dfrac{180°}{\pi} = 57{,}3°$

d) $53°\cdot\dfrac{\pi}{180°} = 0{,}925$ **e)** $-130°\cdot\dfrac{\pi}{180°} = -2{,}269$ **f)** $-1{,}3\cdot\dfrac{180°}{\pi} = -74{,}5°$

g) $3{,}7\cdot\dfrac{180°}{\pi} = 212{,}0°$ **h)** $249°\cdot\dfrac{\pi}{180°} = 4{,}346$

5.40 Siehe Lehrbuch Seite 7:
a) ungerade, weil $\sin(-x) = -\sin x$, Graph punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs
b) gerade, weil $\cos(-x) = \cos x$, Graph symmetrisch bezüglich der y–Achse
c) ungerade, weil $\tan(-x) = -\tan x$, Graph punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs

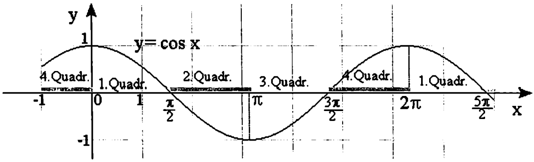
5.41 **a)**



Nullstellen: $0, \pi, 2\pi$; Extremstellen: $\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}$.

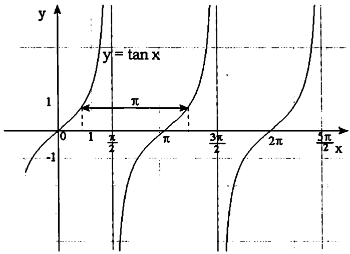
Vorzeichenverhalten: positiv im 1. und 2. Quadranten, negativ im 3. und 4. Quadranten.

5.41 b)



Nullstellen: $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$; Extremstellen: 0, π, 2π;
Vorzeichenverhalten: positiv im 1. und 4. Quadranten, negativ im 2. und 3. Quadranten.

5.42



Nicht definiert für $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ (Unendlichkeitsstellen).

Periode: π.

5.43 Die Kreisfunktionen sind *periodische* Funktionen.

5.44 **a)** wahr **b)** wahr **c)** wahr

5.45 **a)** $x_k = 3\pi/2 + k \cdot 2\pi$ **b)** $x_k = k \cdot 2\pi$ **c)** $x_k = \pi + k \cdot 2\pi$

5.46 $x_k = \pi/2 + k \cdot \pi$

5.47 **a)** streng monoton steigend in $[-\pi/2, \pi/2]$ **b)** streng monoton fallend in $[0, \pi]$
c) streng monoton steigend in $]-\pi/2, \pi/2[$

5.48 **a)** 0 **b)** π/2 **c)** -π/2 **d)** π/2 **e)** 0 **f)** π **g)** 0 **h)** -π/4

5.49 **a)** sin(π/6) = 0,5 **b)** sin 0,927 = 0,8 **c)** cos 1,369 = 0,2
d) cos 2,094 = -0,5 **e)** tan 0,611 = 0,7 **f)** tan 1,326 = 4

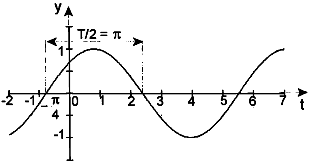
5.50 **a)** und **d)** sind sinnvoll
b) und **c)** sind nicht sinnvoll, da der Sinus- und der Kosinuswert eines Winkels zwischen –1 und 1 liegen müssen.

5.51 $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

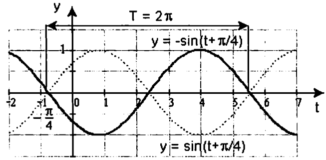
a) $\arccos 0{,}5 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ **b)** $\arccos 0{,}707 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

c) $\arcsin 0{,}866 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ **d)** $\arcsin 0{,}5 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

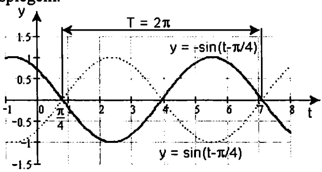
5.52 **a)** $T = 2\pi/\omega = 2\pi/1 = 2\pi$; Nullstelle beim Ursprung, nach der die Sinusfunktion ansteigt: $t + \pi/4 = 0 \Rightarrow t_0 = -\pi/4$



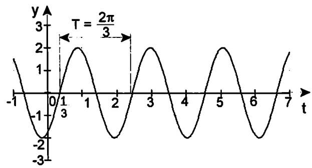
b) Wir zeichnen zuerst $y = \sin(t + \pi/4)$; $T = 2\pi/\omega = 2\pi/1 = 2\pi$; Nullstelle beim Ursprung, nach der diese Sinusfunktion ansteigt: $t + \pi/4 = 0 \Rightarrow t_0 = -\pi/4$. Nun Graphen von $y = \sin(t + \pi/4)$ an der t–Achse spiegeln.



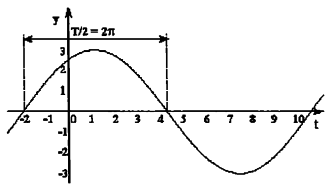
c) Wir zeichnen zuerst $y = \sin(t - \pi/4)$; $T = 2\pi/\omega = 2\pi/1 = 2\pi$; Nullstelle beim Ursprung, nach der diese Sinusfunktion ansteigt: $t - \pi/4 = 0 \Rightarrow t_0 = \pi/4$. Nun Graphen von $y = \sin(t - \pi/4)$ an der t–Achse spiegeln.



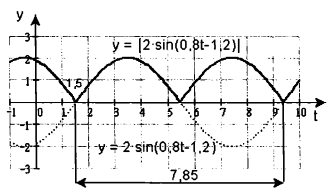
d) $T = 2\pi/\omega = 2\pi/3$; Nullstelle beim Ursprung, nach der die Sinusfunktion ansteigt: $3t - 1 = 0 \Rightarrow t_0 = 1/3$



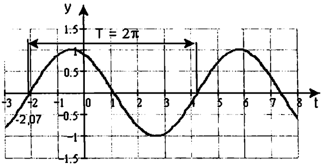
e) $T = 2\pi/\omega = 2\pi/0{,}5 = 4\pi$; Nullstelle beim Ursprung, nach der die Sinusfunktion ansteigt: $t/2 + 1 = 0 \Rightarrow t_0 = -2$



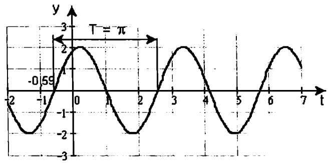
f) Periode der Funktion $y = 2\cdot\sin(0{,}8\cdot t - 1{,}2)$: $T = 2\pi/\omega = 2\pi/0{,}8 = 7{,}85$; Nullstelle beim Ursprung, nach der die Funktion ansteigt: $0{,}8\cdot t - 1{,}2 = 0 \Rightarrow t_0 = 1{,}5$. Man zeichnet zuerst den Graphen der Funktion $y = 2\cdot\sin(0{,}8\cdot t - 1{,}2)$ zeichnen und geht danach zu ihrem Betrag über.



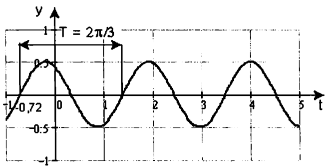
5.53 **a)** $\cos(t+0{,}50) = \sin(t + 0{,}5 + \pi/2) = \sin(t+2{,}07)$; Periode $T = 2\pi/\omega = 2\pi/1 = 2\pi$; Nullstelle beim Ursprung, nach der die Sinusfunktion ansteigt: $t + 2{,}07 = 0 \Rightarrow t_0 = -2{,}07$



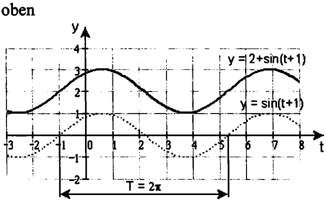
b) $2\cdot\cos(2t - 0{,}40) = 2\cdot\sin(2t - 0{,}4 + \pi/2) = 2\cdot\sin(2t + 1{,}17)$; Periode: $T = 2\pi/\omega = 2\pi/2 = \pi$; Nullstelle beim Ursprung, nach der die Sinusfunktion ansteigt: $2t + 1{,}17 = 0 \Rightarrow t_0 = -0{,}59$



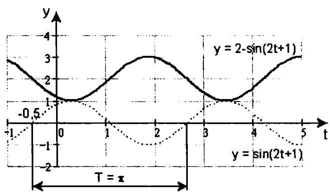
c) $\frac{1}{2}\cdot\cos(3t + 0{,}60) = \frac{1}{2}\cdot\sin(3t + 2{,}17)$;
Periode $T = 2\pi/\omega = 2\pi/3$; Nullstelle beim Ursprung, nach der die Sinusfunktion ansteigt: $3t + 2{,}17 = 0 \Rightarrow t_0 = -0{,}72$



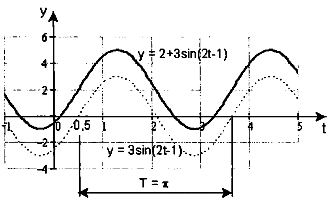
5.54 **a)** $y = \sin(t+1)$; Periode $T = 2\pi/\omega = 2\pi/1 = 2\pi$; Nullstelle beim Ursprung, nach der die Sinusfunktion ansteigt: $t + 1 = 0 \Rightarrow t_0 = -1$; Daraus den Graphen von $y(t) = 2 + \sin(t+1)$ durch Verschiebung um 2 Einheiten nach oben



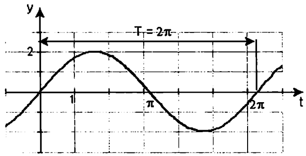
b) $y = \sin(2t+1)$; Periode $T = 2\pi/\omega = 2\pi/2 = \pi$; Nullstelle beim Ursprung, nach der die Sinusfunktion ansteigt: $2t + 1 = 0 \Rightarrow t_0 = -0{,}5$; Daraus den Graphen von $y(t) = -\sin(2t+1)$ durch Spiegelung an der t–Achse. Graph von $y(t) = 2 + \sin(2t+1)$ durch anschließende Verschiebung um 2 Einheiten nach oben



c) $y = 3\cdot\sin(2t-1)$; Periode $T = 2\pi/\omega = 2\pi/2 = \pi$; Nullstelle beim Ursprung, nach der die Sinusfunktion ansteigt: $2t - 1 = 0 \Rightarrow t_0 = 0{,}5$; Daraus den Graphen von $y(t) = 2+3\cdot\sin(2t-1)$ durch Verschiebung um 2 Einheiten nach oben

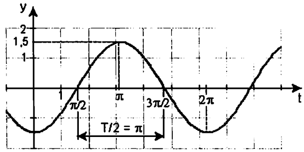


5.55 a)



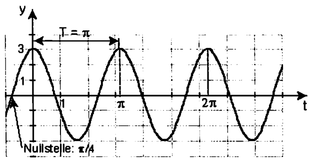
$y = A\cdot\sin(\omega t+\varphi)$: $A = 2$;
$T = 2\pi/\omega = 2\pi \Rightarrow \omega = 1$;
Nullstelle beim Ursprung: $t_0 = -\varphi/\omega = -\varphi/1 = 0$
$\Rightarrow \varphi = 0$; $y = 2\cdot\sin(t + 1)$

b)



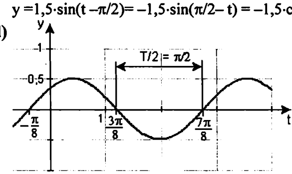
$y = A\cdot\sin(\omega t+\varphi)$: $A = 1{,}5$; $T = 2\pi/\omega = 2\pi \Rightarrow \omega = 1$; Nullstelle beim Ursprung, nach der die Sinusfunktion ansteigt: $t_0 = -\varphi/\omega = -\varphi/1 = \pi/2 \Rightarrow \varphi = -\pi/2$; $y = 1{,}5\cdot\sin(t - \pi/2)$.
Wegen $\sin(-x)= -\sin x$ und $\sin(\pi/2-x) = \cos x$:
$y = 1{,}5\cdot\sin(t - \pi/2)= -1{,}5\cdot\sin(\pi/2- t) = -1{,}5\cdot\cos t$

c)



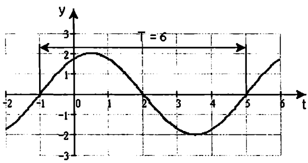
$y = A\cdot\sin(\omega t+\varphi)$: $A = 3$; $T = 2\pi/\omega = \pi \Rightarrow$
$\omega = 2$; Nullstelle beim Ursprung, nach der die Sinusfunktion ansteigt:
$t_0 = -\varphi/\omega = = -\varphi/2 = \pi/4 \Rightarrow \varphi = \pi/2$;
$y = 3\cdot\sin(2t + \pi/2)$. Wegen $\sin(x+ \pi/2)= \cos x$:
$y = 3\cdot\sin(2t + \pi/2)= 3\cdot\cos(2t)$

d)



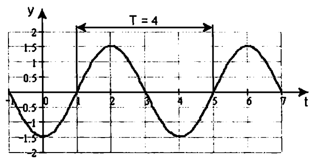
$y = A\cdot\sin(\omega t+\varphi)$: $A = 0{,}5$; $T = 2\pi/\omega = \pi \Rightarrow$
$\omega = 2$; Nullstelle beim Ursprung, nach der die Sinusfunktion ansteigt:
$t_0 = -\varphi/\omega = = -\varphi/2 = -\pi/8 \Rightarrow \varphi = \pi/4$;
$y = 0{,}5\cdot\sin(2t + \pi/4)$.

5.56 a)



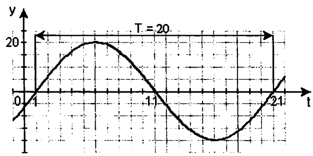
$y = A\cdot\sin(\omega t+\varphi)$: $A = 2$; $T = 2\pi/\omega = 6 \Rightarrow$
$\omega = \pi/3$; Nullstelle beim Ursprung, nach der die Sinusfunktion ansteigt:
$t_0 = -\varphi/\omega = = -3\varphi/\pi = -1 \Rightarrow \varphi = \pi/3$;
$y = 2\cdot\sin(\pi t/3 + \pi/3)$.

b)



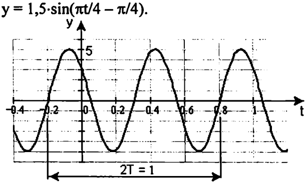
$y = A\cdot\sin(\omega t+\varphi)$: $A = 1{,}5$; $T = 2\pi/\omega = 4 \Rightarrow$
$\omega = \pi/4$; Nullstelle beim Ursprung, nach der die Sinusfunktion ansteigt:
$t_0 = -\varphi/\omega = = -4\varphi/\pi = 1 \Rightarrow \varphi = -\pi/4$;
$y = 1{,}5\cdot\sin(\pi t/4 - \pi/4)$.

c)



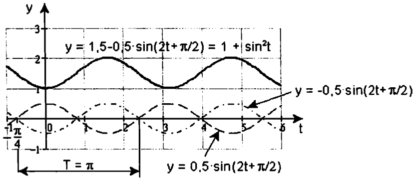
$y = A\cdot\sin(\omega t+\varphi)$: $A = 20$; $T = 2\pi/\omega = 20 \Rightarrow$
$\omega = \pi/10$; Nullstelle beim Ursprung, nach der die Sinusfunktion ansteigt:
$t_0 = -\varphi/\omega = = -10\varphi/\pi = 1 \Rightarrow \varphi = - \pi/10$;
$y = 20\cdot\sin(\pi t/10- \pi/10)$.

d)

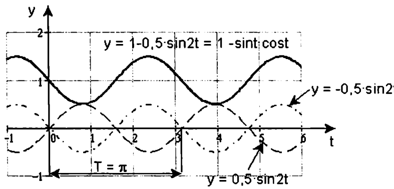


$A = 5$; $T = 2\pi/\omega = 0{,}5 \Rightarrow \omega = 4\pi$; Nullstelle beim Ursprung, nach der die Sinusfunktion ansteigt:
$t_0 = -\varphi/\omega = -\varphi/(4\pi) = -0{,}2 \Rightarrow \varphi = 0{,}8\pi$;
$y = 5\cdot\sin(4\pi t+0{,}8\pi)$.

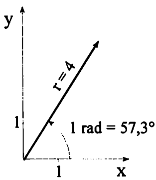
5.57 **a)** $y = 1 + \sin^2 t = 1 + 0{,}5\cdot(1 - \cos 2t) =$
$= 1{,}5 - 0{,}5\cdot\cos 2t =$
$= 1{,}5 - 0{,}5\cdot\sin(2t + \pi/2)$.
Sinusfunktion $y = 0{,}5\cdot\sin(2t + \pi/2)$:
Periode $T = 2\pi/\omega = 2\pi/2 = \pi$;
Nullstelle beim Ursprung, nach der die Sinusfunktion ansteigt:
$t_0 = -\varphi/\omega = -\pi/4$; Graph an t–Achse spiegeln und dann um 1,5 Einheiten nach oben verschieben.



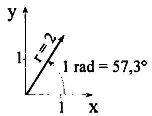
b) $y = 1 - \sin t\cdot \cos t = 1 - 0{,}5\cdot\sin 2t$;
Sinusfunktion $y = 0{,}5\cdot\sin 2t$:
Periode $T = 2\pi/\omega = 2\pi/2 = \pi$;
Nullstelle beim Ursprung, nach der die Sinusfunktion ansteigt: $t_0 = 0$;
Graph an der t–Achse spiegeln und dann um 1 Einheit nach oben verschieben.



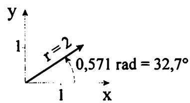
5.58 **a)**



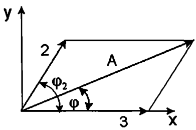
b)



c) $\cos\alpha = \sin(\alpha + \pi/2)$:
$2\cdot\cos(2t-1) = 2\cdot\sin(2t-1+\pi/2) =$
$= 2\cdot\sin(2t + 0{,}571)$



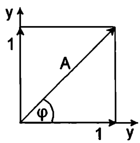
5.59 **a)**



$A_1 = 3$; $\varphi_1 = 0$, $A_2 = 2$, $\varphi_2 = 1$ (Winkel im Bogenmaß);
$A = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2\cdot 3\cdot 2\cdot\cos(1-0)} \approx 4{,}4$;
$\tan\varphi = \dfrac{3\cdot\sin 0 + 2\cdot\sin 1}{3\cdot\cos 0 + 2\cdot\cos 1} = 0{,}412 \Rightarrow \varphi \approx 0{,}39 = 22{,}4°$;
$y = y_1 + y_2 = 4{,}4\cdot\sin(t + 0{,}39)$

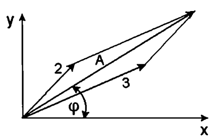
b) Wie a), gleiches Zeigerdiagramm; Unterschied nur in der Kreisfrequenz $\omega = 3$.
$y = y_1 + y_2 = 4{,}4\cdot\sin(3t + 0{,}39)$

c)



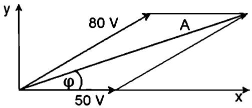
$A_1 = A_2 = 1$; $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/2$ (Winkel im Bogenmaß);
$A = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2\cdot 1\cdot 1\cdot\cos(\pi/2 - 0)} = \sqrt{2} \approx 1{,}4$
$\tan\varphi = \dfrac{1\cdot\sin 0 + 1\cdot\sin(\pi/2)}{1\cdot\cos 0 + 1\cdot\cos(\pi/2)} = 1 \Rightarrow \varphi = \pi/4 \approx 0{,}79$ oder $\varphi = 45°$
$y = y_1 + y_2 = \sqrt{2}\cdot\sin(t + \pi/4) \approx 1{,}4\cdot\sin(t + 0{,}79)$

d)



$A_1 = 2$; $\varphi_1 = 0{,}8$, $A_2 = 3$, $\varphi_2 = 0{,}4$ (Winkel im Bogenmaß);
$A = \sqrt{2^2 + 3^2 + 2\cdot 2\cdot 3\cdot\cos(0{,}4 - 0{,}8)} \approx 4{,}9$;
$\tan\varphi = \dfrac{2\cdot\sin 0{,}8 + 3\cdot\sin 0{,}4}{2\cdot\cos 0{,}8 + 3\cdot\cos 0{,}4} = 0{,}626 \Rightarrow \varphi \approx 0{,}56 = 32{,}9°$;
$y = y_1 + y_2 = 4{,}9\cdot\sin(2t + 0{,}56)$

5.60 **a)**



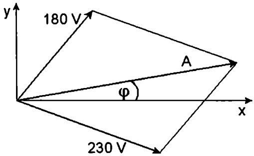
$A_1 = 50$; $\varphi_1 = 0°$, $A_2 = 80$, $\varphi_2 = 30°$;

$A = \sqrt{50^2 + 80^2 + 2 \cdot 50 \cdot 80 \cdot \cos(30° - 0°)} = 125{,}8$;

$\tan\varphi = \dfrac{50 \cdot \sin 0° + 80 \cdot \sin 30°}{50 \cdot \cos 0° + 80 \cdot \cos 30°} = 0{,}335 \Rightarrow \varphi = 18{,}5°$;

$u = u_1 + u_2 = 125{,}8\ \text{V} \cdot \sin(\omega \cdot t + 18{,}5°)$

b)



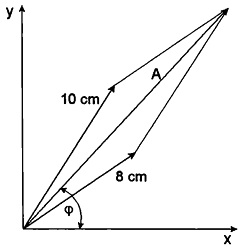
$A_1 = 230$; $\varphi_1 = -20°$, $A_2 = 180$, $\varphi_2 = 50°$;

$A = \sqrt{230^2 + 180^2 + 2 \cdot 230 \cdot 180 \cdot \cos(50° - (-20°))} = 337{,}1$;

$\tan\varphi = \dfrac{230 \cdot \sin(-20°) + 180 \cdot \sin 50°}{230 \cdot \cos(-20°) + 180 \cdot \cos 50°} = 0{,}178 \Rightarrow \varphi = 10{,}1°$;

$u = u_1 + u_2 = 337{,}1\ \text{V} \cdot \sin(\omega \cdot t + 10{,}1°)$

5.61



$A_1 = 8$; $\varphi_1 = 0{,}6$; $A_2 = 10$, $\varphi_2 = 1$ (Winkel im Bogenmaß);

$A = \sqrt{8^2 + 10^2 + 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos(1 - 0{,}6)} = 17{,}6$;

$\tan\varphi = \dfrac{8 \cdot \sin 0{,}6 + 10 \cdot \sin 1}{8 \cdot \cos 0{,}6 + 10 \cdot \cos 1} = 1{,}077 \Rightarrow \varphi = 0{,}82 = 47{,}1°$;

$y = y_1 + y_2 = 17{,}6\ \text{cm} \cdot \sin(3\ \text{s}^{-1} \cdot t + 0{,}82)$

5.62 **a)** $u = 2x$; $\sin u = 0{,}8 \Rightarrow u_1 = 53{,}1°$; $u_2 = 180° - u_1 = 126{,}9°$; $u_3 = 360° + u_1$, $u_4 = 360° + u_2$;
$x_1 = u_1/2 = 26{,}3°$; $x_2 = u_2/2 = 63{,}4°$; $x_3 = u_3/2 = 206{,}6°$; $x_4 = u_4/2 = 243{,}4°$

b) $u = x/2$; $\cos x = -0{,}4 \Rightarrow u_1 = 113{,}6°$; $u_2 = 360° - u_1 = 246{,}4°$; $x_1 = 2 \cdot u_1 = 227{,}2°$;
$x_2 = 2 \cdot u_2 \geq 360°$ und daher nicht mehr zulässig

c) $u = 0{,}8 \cdot x$; $\tan u = 2 \Rightarrow u_1 = 63{,}4°$; $u_2 = 180° + u_1$, $u_3 = 360° + u_1, \ldots$
$x_1 = u_1/0{,}8 = 79{,}3°$; $x_2 = u_2/0{,}8 = 304{,}3°$

d) $u = 1{,}5 \cdot x$; $\sin u = 0{,}5 \Rightarrow u_1 = 30°$; $u_2 = 180° - 30° = 150°$; $u_3 = 360° + u_1$; $u_4 = 360° + u_2; \ldots$
$x_1 = u_1/1{,}5 = 20°$; $x_2 = u_2/1{,}5 = 100°$; $x_3 = u_3/1{,}5 = 260°$; $x_4 = u_4/1{,}5 = 340°$

e) $u = 1{,}2$; $\cos u = 0{,}5 \Rightarrow u_1 = 60°$; $u_2 = 360° - 60° = 300°$; $u_3 = 360° + u_1$; $u_4 = 360° + u_2, \ldots$
$x_1 = u_1/1{,}2 = 50°$; $x_2 = u_2/1{,}2 = 250°$; $x_3 = u_3/1{,}2 = 350°$

f) $u = 1{,}5$; $\tan u = 1 \Rightarrow u_1 = 45°$; $u_2 = 180° + u_1 = 225°$; $u_3 = 2 \cdot 180° + u_1, \ldots$
$x_1 = u_1/1{,}5 = 30°$; $x_2 = u_2/1{,}5 = 150°$; $x_3 = u_3/1{,}5 = 270°$

5.63 **a)** $u = 2x + 3$; $\sin u = 0{,}5 \Rightarrow u_1 = \pi/6 = 0{,}524$; $u_2 = \pi - u_1 = 5\pi/6 = 2{,}618$; $u_3 = 2\pi + u_1 = 6{,}807$,
$u_4 = 2\pi + u_2 = 8{,}901$; $u_5 = 2 \cdot 2\pi + u_1$; $u_6 = 2 \cdot 2\pi + u_2, \ldots$
$x = (u-3)/2$; d.h. es muss $u > 3$ sein, damit x nicht negativ ist:
$x_1 = (u_3 - 3)/2 = 1{,}903$; $x_2 = (u_4 - 3)/2 = 2{,}951$; $x_3 = (u_5 - 3)/2 = 5{,}045$; $x_4 = (u_6 - 3)/2 = 6{,}092$

b) $u = 3x - 1$; $\cos u = 0{,}2 \Rightarrow u_1 = 1{,}369$; $u_2 = 2\pi - u_1 = 4{,}914$; $u_3 = 2\pi + u_1 = 7{,}653$;
$u_4 = 2\pi + u_2 = 11{,}197$; $u_5 = 2 \cdot 2\pi + u_1 = 13{,}936$; $u_6 = 2 \cdot 2\pi + u_2 = 17{,}480; \ldots$
$x_1 = (u_1 + 1)/3 = 0{,}790$; $x_2 = (u_2 + 1)/3 = 1{,}971$; $x_3 = 2{,}884$; $x_4 = 4{,}066$; $x_5 = 4{,}979$; $x_6 = 6{,}160$

c) $u = (x+1)/2$; $\tan u = 3 \Rightarrow u_1 = 1{,}249$; $u_2 = \pi + u_1, \ldots$
$x_1 = 2u_1 - 1 = 1{,}498$; $x_2 = 2u_2 - 1 \geq 360°$ und daher nicht mehr zulässig

5.64 **a)** $2\cdot\sin x = 3\cdot\cos x \mid : \cos x$; $\tan x = 1{,}5 \Rightarrow x_1 = 0{,}983$; $x_2 = \pi + x_1 = 4{,}124$

b) $\sin x = 2\cdot\tan x$; $\sin x = 2\cdot\dfrac{\sin x}{\cos x}$; $\sin x\cdot\left(1-\dfrac{2}{\cos x}\right)=0$; Produkt – Null – Satz: $\sin x = 0 \Rightarrow$

$x_1 = 0$; $x_2 = \pi$; $1-\dfrac{2}{\cos x}=0$, d. h. $\cos x = 2$, ist nicht möglich, daher keine weiteren Lösungen

c) $\cos x = -\dfrac{1}{2}\cdot\tan x$; $2\cdot\cos x = -\dfrac{\sin x}{\cos x}$; $2\cdot\cos^2 x = -\sin x$;

$2\cdot(1-\sin^2 x) = -\sin x$; $2\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$; $u = \sin x$;

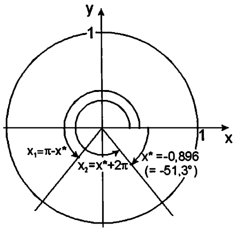
$2u^2 - u - 2 = 0$; $u_{12} = \dfrac{1\pm\sqrt{1+16}}{4}$;

$u_1 = -0{,}781$; $\sin x = -0{,}781$; $x^* = -0{,}896$ $(= -51{,}3°)$;

$x_1 = \pi - x^* = 4{,}038$ $(= 231{,}3°)$;

$x_2 = x^* + 2\pi = 5{,}387$ $(= 308{,}7°)$;

$u_2 = 1{,}281$; $\sin x = 1{,}281$ nicht möglich, daher keine weiteren Lösungen



5.65 **a)** $2\cdot\sin x = \dfrac{1}{\cos x}$; $2\cdot\sin x\cdot\cos x = 1$; $\sin 2x = 1$; $u = 2x$; $\sin u = 1 \Rightarrow u_1 = \pi/2$;

$u_2 = 2\pi + \pi/2 = 5\pi/2, \ldots$; $x_1 = u_1/2 = \pi/4$; $x_2 = u_2/2 = 5\pi/4$

b) $\cos^2 x - \sin^2 x = 0{,}4$; $\cos 2x = 0{,}4$; $u = 2x$; $\cos u = 0{,}4 \Rightarrow u_1 = 1{,}159$; $u_2 = 2\pi - u_1 = 5{,}124$,

$u_3 = 2\pi + u_1 = 7{,}442$; $u_4 = 2\pi + u_2 = 11{,}407$; ... ; $x_1 = u_1/2 = 0{,}580$;

$x_2 = u_2/2 = 2{,}562$; $x_3 = u_3/2 = 3{,}721$; $x_4 = u_4/2 = 5{,}704$.

Lösungsvariante: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$; $1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 0{,}4$; $\sin^2 x = 0{,}3$; $\sin x = \pm\sqrt{0{,}3}$ usw.

c) $\sin^2 x - 2\cdot\cos^2 x = 1$; $\sin^2 x - 2\cdot(1-\cos^2 x) = 1$; $\sin^2 x = 1$;

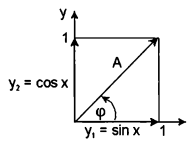
$\sin x = +1 \Rightarrow x_1 = \pi/2$; $\sin x = -1 \Rightarrow x_2 = 3\pi/2$

5.66 **a)** $\sin x + \cos x = A\cdot\sin(x+\varphi)$; aus dem Zeigerdiagramm ergibt sich unmittelbar ($\cos x = \sin(x + 90°)$): $A = \sqrt{2}$; $\varphi = 45° = \pi/4$;

$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cdot\sin(x+\pi/4) = 1{,}2$; $\sin(x+\pi/4) = 0{,}849$;

$u = x + \pi/4$: $\sin u = 0{,}849 \Rightarrow u_1 = 1{,}013$; $u_2 = \pi - u_1 = 2{,}128$; ...

$x_1 = u_1 - \pi/4 = 0{,}228$; $x_2 = u_2 - \pi/4 = 1{,}343$



Lösungsvariante:

$\sin x + \cos x = 1{,}2$; $\cos x = 1{,}2 - \sin x$; quadrieren: $\cos^2 x = (1{,}2 - \sin x)^2$;

$1 - \sin^2 x = 1{,}44 - 2\cdot 1{,}2\cdot\sin x + \sin^2 x$; $\sin^2 x - 1{,}2\cdot\sin x + 0{,}44 = 0$; $u = \sin x$;

$u^2 - 1{,}2\cdot u + 0{,}22 = 0$; $u_{12} = 0{,}6 \pm \sqrt{0{,}36 - 0{,}22}$; $u_1 = 0{,}226$; $u_2 = 0{,}974$;

$\sin x = u_1 \Rightarrow x_1 = 0{,}228$; $x_2 = \pi - x_1 = 2{,}914$; $\sin x = 0{,}974 \Rightarrow x_3 = 1{,}343$; $x_4 = \pi - x_3 = 1{,}799$;

Probe (notwendig, weil das Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist!):

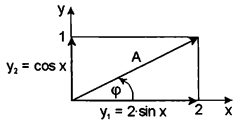
$\sin x_1 + \cos x_1 = 1{,}2$; stimmt! $\sin x_2 + \cos x_2 = 1{,}2$; stimmt nicht!

$\sin x_3 + \cos x_3 = 1{,}2$; stimmt! $\sin x_4 + \cos x_4 = 1{,}2$; stimmt nicht!

Lösungen daher: $x_1 = 0{,}228$ sowie $x_3 = 1{,}343$

5.66 **b)** $2\cdot\sin x + \cos x = A\cdot\sin(x + \varphi)$; aus dem Zeigerdiagramm ergibt sich ($\cos x = \sin(x + 90°)$): $A = \sqrt{2^2+1^1} = \sqrt{5}$; $\tan\varphi = 1/2$

$\Rightarrow\ \varphi = 0{,}464$;



$2\cdot\sin x + \cos x = \sqrt{5}\cdot\sin(x + 0{,}464) = 0{,}8$;

$\sin(x+0{,}464) = 0{,}358$; $u = x + 0{,}464$; $\sin u = 0{,}358 \Rightarrow$

$u_1 = 0{,}366$; $u_2 = \pi - u_1 = 2{,}776$; $u_3 = 2\pi + u_1 = 6{,}649$; ...

$x_1 = u_1 - 0{,}464 = -0{,}098$ nicht zulässig, da nicht in $[0; 2\pi[$; $x_2 = u_2 - 0{,}464 = 2{,}312$;

$x_3 = u_3 - 0{,}464 = 6{,}185$; Lösungen daher $x_2 = 2{,}312$ sowie $x_3 = 6{,}185$

Lösungsvariante:

$2\cdot\sin x + \cos x = 0{,}8$; $\cos x = 0{,}8 - 2\cdot\sin x$; $\cos^2 x = (0{,}8 - 2\sin x)^2$;

$1 - \sin^2 x = 0{,}64 - 3{,}2\cdot\sin x + 4\cdot\sin^2 x$; $\sin^2 x - 0{,}64\cdot\sin x - 0{,}072 = 0$; $u = \sin x$;

$u^2 - 0{,}64\cdot u - 0{,}072 = 0$; $u_{12} = 0{,}32 \pm \sqrt{0{,}32^2 + 0{,}072}$; $u_1 = -0{,}098$; $u_2 = 0{,}738$;

$\sin x = u_1 \Rightarrow x^* = -0{,}098$; $x_1 = \pi - x^* = 3{,}239$; $x_2 = x^* + 2\pi = 6{,}185$;

$\sin x = u_2 \Rightarrow x_3 = 0{,}830$; $x_4 = \pi - x_3 = 2{,}312$;

Probe: $2\cdot\sin x_1 + \cos x_1 = 0{,}8$ stimmt nicht! $2\cdot\sin x_2 + \cos x_2 = 0{,}8$ stimmt!

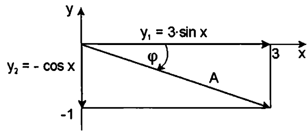
$2\cdot\sin x_3 + \cos x_3 = 0{,}8$ stimmt nicht! $2\cdot\sin x_4 + \cos x_4 = 0{,}8$ stimmt!

Lösungen daher: $x_2 = 6{,}185$ sowie $x_4 = 2{,}312$

c) $3\cdot\sin x + (-\cos x) = A\cdot\sin(x + \varphi)$;

$y_1 = 3\cdot\sin x$, $y_2 = -\cos x = \sin(x - \pi/2)$;

$A = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$; $\tan\varphi = -1/3 \Rightarrow -\varphi = -0{,}322$;



$3\cdot\sin x - \cos x = \sqrt{10}\cdot\sin(x - 0{,}322) = 0{,}2$;

$\sin(x - 0{,}322) = 0{,}063$; $u = x - 0{,}322$; $\sin u = 0{,}063$

$\Rightarrow u_1 = 0{,}063$; $u_2 = \pi - u_1 = 3{,}078$;

$x_1 = u_1 + 0{,}322 = 0{,}385$; $x_2 = u_2 + 0{,}322 = 3{,}400$

Lösungsvariante:

$3\cdot\sin x - \cos x = 0{,}2$; $\cos x = 3\cdot\sin x - 0{,}2$; $\cos^2 x = (3\cdot\sin x - 0{,}2)^2$;

$1 - \sin^2 x = 9\cdot\sin^2 x - 1{,}2\cdot\sin x + 0{,}04$; $\sin^2 x - 0{,}12\cdot\sin x - 0{,}096 = 0$; $u = \sin x$;

$u^2 - 0{,}12\cdot u - 0{,}096 = 0$; $u_{12} = 0{,}06 \pm \sqrt{0{,}06^2 + 0{,}096}$; $u_1 = -0{,}256$; $u_2 = 0{,}376$;

$\sin x = u_1 \Rightarrow x^* = -0{,}258$; $x_1 = \pi - x^* = 3{,}400$; $x_2 = x^* + 2\pi = 6{,}025$;

$\sin x = u_2 \Rightarrow x_3 = 0{,}385$; $x_4 = \pi - x_3 = 2{,}757$;

Die Probe ergibt, dass nur $x_1 = 3{,}400$ sowie $x_3 = 0{,}385$ Lösungen sind.

d) $1 + \sin x = \sin^2 x$; $1 + \sin x = 1 - \cos^2 x$; $\sin x = -\cos^2 x$; $\sin^2 x = \cos^4 x$

$1 - \cos^2 x = \cos^4 x$; $\cos^2 x = u$; $1 - u = u^2$; $u_{12} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+1}$; $u_1 = 0{,}618$; $u_2 = -1{,}618$;

$\cos^2 x = u_1 \Rightarrow \cos x = 0{,}786$ oder $\cos x = -0{,}786$;

$\cos x = 0{,}786$: $x_1 = 0{,}666$; $x_2 = 2\pi - x_1 = 5{,}617$;

$\cos x = -0{,}786$: $x_3 = 2{,}475$; $x_4 = 2\pi - x_3 = 3{,}808$;

$\cos^2 x = u_2 = -1{,}618$ ist nicht möglich.

Die Probe ergibt, dass nur $x_2 = 5{,}617$ sowie $x_4 = 3{,}808$ Lösungen sind.

e) $1 + \cos x = \sin^2 x$; $1 + \cos x = 1 - \cos^2 x$; $\cos x = -\cos^2 x$; $\cos x\cdot(1 + \cos x) = 0$;

Produkt – Null – Satz: $\cos x = 0 \Rightarrow x_1 = \pi/2$ oder $x_2 = 3\pi/2$; $\cos x = -1 \Rightarrow x_3 = \pi$

f) $2 - \sin x = \sin^2 x$; $\sin x = u$: $u^2 + u - 2 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = -2$; $\sin x = u_1 \Rightarrow x_1 = \pi/2$;

$\sin x = u_2$ ist nicht möglich, daher keine weiteren Lösungen

5.67 **a)** $\sin 2x = 2\cdot\sin x$; $2\cdot\sin x\cdot\cos x = 2\cdot\sin x$; $\sin x\cdot\cos x - \sin x = 0$; $\sin x\cdot(\cos x - 1) = 0$; Produkt – Null – Satz: $\sin x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = \pi$; $\cos x = 1 \Rightarrow x_3 = 0\ (= x_1)$

b) $5\cdot\sin 2x = 4\cdot\cot x$; $5\cdot 2\cdot\sin x\cdot\cos x = 4\cdot\frac{\cos x}{\sin x}$; $5\cdot\sin^2 x\cdot\cos x = 4\cdot\cos x$; $\cos x\cdot(5\cdot\sin^2 x - 2) = 0$;
Produkt – Null – Satz: $\cos x = 0 \Rightarrow x_1 = \pi/2$; $x_2 = 3\pi/2$;
$\sin^2 x = 2/5$; $\sin x = 0{,}632$ sowie $\sin x = -0{,}632$;
$\sin x = 0{,}632 \Rightarrow x_3 = 0{,}685$; $x_4 = \pi - x_3 = 2{,}457$;
$\sin x = -0{,}632 \Rightarrow x^* = -0{,}685$; $x_5 = \pi - x^* = 3{,}826$; $x_6 = 2\pi + x^* = 5{,}598$

c) $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}$; $\sin^2 x + \sin x\cdot\cos x = 1$; $1 - \cos^2 x + \sin x\cdot\cos x = 1$;
$-\cos^2 x + \sin x\cdot\cos x = 0$; $\cos x\cdot(\sin x - \cos x) = 0$; Produkt – Null – Satz: $\cos x = 0 \Rightarrow x_1 = \pi/2$; $x_2 = 3\pi/2$; $\sin x - \cos x = 0$; $\sin x = \cos x \mid : \cos x$; $\tan x = 1 \Rightarrow x_3 = \pi/4$; $x_4 = 5\pi/4$

d) $\cos x + \cot x = 1 + \sin x$; $\cos x + \frac{\cos x}{\sin x} = 1 + \sin x$; $\sin x\cdot\cos x + \cos x = \sin x + \sin^2 x$;
$\cos x\cdot(\sin x + 1) = \sin x\cdot(1 + \sin x)$; $(\sin x + 1)\cdot(\cos x - \sin x) = 0$; Produkt – Null – Satz:
$\sin x = -1 \Rightarrow x_1 = 3\pi/2$; $\cos x = \sin x$; $1 = \frac{\sin x}{\cos x}$; $1 = \tan x \Rightarrow x_2 = \pi/4$; $x_3 = x_2 + \pi = 5\pi/4$

e) $\cos x - \tan x = 0{,}5\cdot\cos x$; $\cos x - \frac{\sin x}{\cos x} = 0{,}5\cdot\cos x$; $0{,}5\cdot\cos x = \frac{\sin x}{\cos x}$; $0{,}5\cdot\cos^2 x = \sin x$;
$1 - \sin^2 x = 2\cdot\sin x$; $\sin x = u$; $u^2 + 2u - 1 = 0$; $u_{12} = -1 \pm \sqrt{1+1}$; $u_1 = 0{,}414$; $u_2 = -2{,}414$;
$\sin x = u_1 = 0{,}414 \Rightarrow x_1 = 0{,}427$; $x_2 = \pi - x_1 = 2{,}715$; $\sin x = u_2$ nicht möglich.

f) $\sin x = \cos 2x$; $\sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$; $\sin x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x$; $2\cdot\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$;
$\sin x = u$; $2u^2 + u - 1 = 0$; $u_{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2}$; $u_1 = 0{,}5$; $u_2 = -1$;
$\sin x = u_1 \Rightarrow x_1 = \pi/6$; $x_2 = \pi - x_1 = 5\pi/6$; $\sin x = u_2 \Rightarrow x_3 = 3\pi/2$

6 Parameterdarstellung und Polarkoordinaten

6.1 **a)** $y = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = 0 \;\Rightarrow$ Zeitpunkt des Auftreffens am Boden $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$;

$x = v_0 \cdot t \;\Rightarrow\; v_0 = \frac{x}{t} = \frac{x}{\sqrt{2h/g}} = \frac{45}{\sqrt{2 \cdot 100/10}}$ = 10,1 m/s = 36,2 km/h.

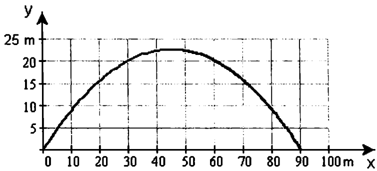
b) $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100}{10}} \approx 4{,}5\ \text{s}$

6.2 Man kann vor dem Zeichnen zur parameterfreien Darstellung übergehen:

$x = v_0 \cdot t \cdot \cos\alpha = 30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot t \;\Rightarrow\; t = \frac{x}{15 \cdot \sqrt{2}}$;

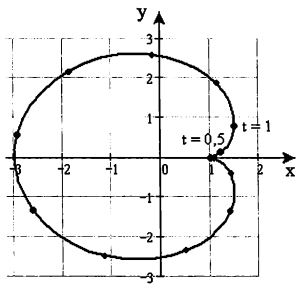
$y = v_0 \cdot t \cdot \sin\alpha - \frac{g}{2} \cdot t^2 = 30 \cdot t \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 5 \cdot t^2 =$

$= 30 \cdot \frac{x}{15 \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 5 \cdot \left(\frac{x}{15 \cdot \sqrt{2}}\right)^2 = x - \frac{x^2}{90}$



6.3 $x(t) = 2R \cdot \cos t - R \cdot \cos 2t = R \cdot (2 \cdot \cos t - \cos 2t)$
$y(t) = 2R \cdot \sin t - R \cdot \sin 2t = R \cdot (2 \cdot \sin t - \sin 2t)$:

t =	x(t) =	y(t) =
0.0	1.00	0.00
0.5	1.21	0.12
1.0	1.50	0.77
1.5	1.13	1.85
2.0	-0.18	2.58
2.5	-1.89	2.16
3.0	-2.94	0.56
3.5	-2.63	-1.36
4.0	-1.16	-2.50
4.5	0.49	-2.37
5.0	1.41	-1.37
5.5	1.41	-0.41
6.0	1.08	-0.02

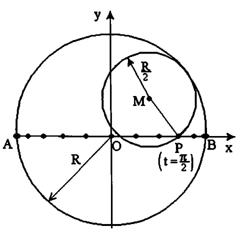


6.4 $a = r = \frac{R}{2}$:

$x(t) = \frac{R}{2} \cdot \cos\frac{t}{2} + \frac{R}{2} \cdot \cos\frac{t}{2} = R \cdot \cos\frac{t}{2}$

$y(t) = \frac{R}{2} \cdot \sin\frac{t}{2} - \frac{R}{2} \cdot \sin\frac{t}{2} = 0$

$y(t)$ ist für alle t gleich null. Der Punkt P bewegt sich auf dem Durchmesser AB: $x(0) = R$ (Punkt B), $x(\pi) = 0$ (Koordinatenursprung), $x(2\pi) = -R$ (Punkt A)



Punkte in π/6–Schritten

6.5 **a)** $x = t+1 \Rightarrow t = x-1,\; y = t-1 = (x-1)-1 = x-2$; $y = x-2$ ist die Gleichung einer Geraden

b) $x = 2\cdot\lambda + 3 \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{1}{2}\cdot(x-3);\; y = \lambda^2 = \frac{1}{4}\cdot(x-3)^2 = \frac{1}{4}\cdot x^2 - \frac{3}{2}\cdot x + \frac{9}{4}$; quadratische Funktion, ihr Graph ist eine sich nach oben öffnende Parabel

c) $x = -t+3 \;\Rightarrow\; t = 3-x,\; y = (t-1)^2 = (3-x-1)^2 = (2-x)^2 = x^2 - 4x + 4$, quadratische Funktion, ihr Graph ist eine sich nach oben öffnende Parabel

d) $x = 1-t \;\Rightarrow\; t = x-1;\; y = -t^2+2 = -(x-1)^2+2 = -x^2+2x+1$; quadratische Funktion, ihr Graph ist eine sich nach unten öffnende Parabel

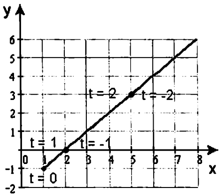
e) $x = \sin t;\; y = \cos^2 t = 1 - \sin^2 t = 1 - x^2$; quadratische Funktion, ihr Graph ist Teileiner sich nach unten öffnenden Parabel

f) $x = 2+t;\; t = x-2;\; y = e^t = e^{x-2} = e^{-2}\cdot e^x \approx 0{,}135\cdot e^{-x}$; Exponentialfunktion

g) $x = 8t \;\Rightarrow\; t = \frac{x}{8};\; y = 3\cdot\sqrt{2\cdot\frac{x}{8}} = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{x} = \frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}$; Wurzelfunktion (eine Potenzfunktion)

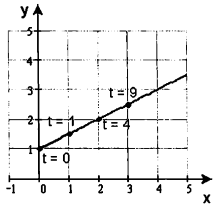
h) $x = t^{-1} \;\Rightarrow\; t = \frac{1}{x};\; y = 2t = \frac{2}{x} = 2\cdot x^{-1}$; Potenzfunktion

6.6 **a)**



t	x(t)	y(t)
-2	5	3
-1	2	0
0	1	-1
1	2	0
2	5	3

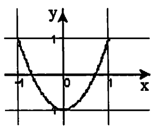
b)



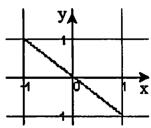
t	x(t)	y(t)
0	0	1
1	1	1,5
4	2	2
9	3	2,5

6.7 $\ln t = \frac{x}{a} \;\Rightarrow\; t = e^{\frac{x}{a}};\; \frac{1}{t} = e^{-\frac{x}{a}};\; y = \frac{a}{2}\cdot\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\cdot\cosh\frac{x}{a}$, Kettenlinie

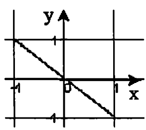
6.8 **a)** $y = \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t =$
$= \cos^2 t - (1 - \cos^2 t) =$
$= 2\cdot\cos^2 t - 1 = 2\cdot x^2 - 1$; Parabelbogen



b) 1. Summensatz:
$y = \cos(t + \pi/2) =$
$= \cos t\cdot\cos(\pi/2) - \sin t\cdot\sin(\pi/2) =$
$= 0\cdot\cos t - 1\cdot\sin t = -\sin t = -x$;
Geradenstück



c) 1. Summensatz:
$x(t) = \sin t\cdot\cos 30° - \cos t\cdot\sin 30° =$
$= \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{3}\cdot\sin t - \cos t\right)$,
$y(t) = \cos t\cdot\cos 60° - \sin t\cdot\sin 60° =$
$= \frac{1}{2}\cdot\left(\cos t - \sqrt{3}\cdot\sin t\right) = -x$;
d.h. $y = -x$; Geradenstück



6.9 Je nach Wahl des Parameters, gibt es unterschiedliche, aber gleichwertige Darstellungen.

	Kordinatenform	Vektorform
a)	$x=\lambda$ $y=-2x+1=-2\lambda+1$	$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$
b)	$x=1+\lambda$ $y=2x-4=2\cdot(1+\lambda)-4=-2+2\lambda$	$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$
c)	$x=\mu$ $y=4x-0{,}5=4\mu-0{,}5$	$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-0{,}5\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$
d)	$x=3\mu$ $y=\frac{2}{3}\cdot x=2\mu$	$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$
e)	$x=3\,\lambda$ $y=-\frac{2}{3}\cdot x-2=-\frac{2}{3}\cdot 3\,\lambda-2=-2\,\lambda-2$	$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$
f)	$x=t$ $y=2$	$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$
g)	$x=3+3\,t$ $y=\frac{1}{3}\cdot(3-x)=\frac{1}{3}\cdot(3-3-3t)=-t$	$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$
h)	$x=t$ $y=x+d=t+d$	$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\d\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

6.10 **a)** $x = 2 - 2\cdot\lambda \Rightarrow \lambda = 1 - 0{,}5\cdot x$; $y = 3 - 5\cdot\lambda = 3 - 5\cdot(1 - 0{,}5\cdot x) = 2{,}5\cdot x - 2$
b) $x = 4 + \mu \Rightarrow \mu = x - 4$; $y = -7 + 3\mu = -7 + 3\cdot(x - 4) = 3x - 19$
c) $x = 1 - 2\cdot t \Rightarrow t = 0{,}5\cdot(1 - x)$; $y = 2 + t = 2 + 0{,}5\cdot(1 - x) = -0{,}5\cdot x + 2{,}5$
d) $x = \lambda \Rightarrow \lambda = x$; $y = 1 + 2\cdot\lambda = 1 + 2x$
e) $x = -\mu \Rightarrow \mu = -x$; $y = 2\cdot\mu = -2\cdot x$
f) $x = 2$; $y = -1 + t$; d.h. senkrecht zur x–Achse verlaufende Gerade mit der Gleichung $x = 2$

6.11 a) $x = 2t + 1 \Rightarrow t = 0{,}5\cdot(x - 1)$; $y = t - 1 = 0{,}5\cdot(x-1) - 1 = 0{,}5\cdot x - 1{,}5$
b) $x = 2\lambda + 3 \Rightarrow \lambda = 0{,}5\cdot(x - 3)$; $y= 1 - \lambda = 1 - 0{,}5\cdot(x - 3) = -0{,}5\cdot x + 2{,}5$
c) $x = -t + 3 \Rightarrow t = 3 - x$; $y = 3\cdot t = 3\cdot(3 - x) = -3x + 9$
d) $x = 1- t \Rightarrow t = 1- t$; $y = 2$; d.h. parallel zur x–Achse verlaufende Gerade mit d. Gleichung $y = 2$

6.12 **a)** $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ **c)** $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ **d)** $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$

6.13 **a)** $\vec{x}=\overrightarrow{OW}+\lambda\cdot\overrightarrow{WV}=\begin{pmatrix}8\\9\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-3-8\\5-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\9\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-11\\-4\end{pmatrix}$; Koordinatenform: $x = 8 - 11\cdot\lambda$, $y = 9 - 4\cdot\lambda$

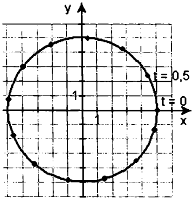
b) $\vec{x}=\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}4-2\\-2-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$; dabei wurde mit $\mu = 2\lambda$ ein neuer Parameter eingeführt, um das Ergebnis etwas zu vereinfachen. Oder: $x = 2+\mu$, $y = 4-3\mu$

c) $\vec{x}=\overrightarrow{OR}+\lambda\cdot\overrightarrow{RS}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-2-3\\3-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$; dabei wurde mit $t = 5\cdot\lambda$ ein neuer Parameter eingeführt, um das Ergebnis etwas zu vereinfachen.
Koordinatenform: $x = 3 - t$; $y = -2 + t$

d) $\vec{x}=\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-2-0\\-2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$; dabei wurde mit $t = -\lambda$ ein neuer Parameter eingeführt, um das Ergebnis etwas zu vereinfachen.
Koordinatenform: $x = 2t$, $y = 1 + 3t$

6.14 a)

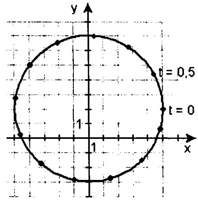
t =	x(t) =	y(t) =
0.0	5.00	0.00
0.5	4.39	2.40
1.0	2.70	4.21
1.5	0.35	4.99
2.0	-2.08	4.55
2.5	-4.01	2.99
3.0	-4.95	0.71
3.5	-4.68	-1.75
4.0	-3.27	-3.78
4.5	-1.05	-4.89
5.0	1.42	-4.79
5.5	3.54	-3.53
6.0	4.80	-1.40



Ursprungskreis mit dem Radius r = 5

b)

t =	x(t) =	y(t) =
0.0	5.00	2.00
0.5	4.39	4.40
1.0	2.70	6.21
1.5	0.35	6.99
2.0	-2.08	6.55
2.5	-4.01	4.99
3.0	-4.95	2.71
3.5	-4.68	0.25
4.0	-3.27	-1.78
4.5	-1.05	-2.89
5.0	1.42	-2.79
5.5	3.54	-1.53
6.0	4.80	0.60

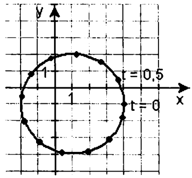


Kreis mit dem Mittelpunkt M(0/2) und dem Radius r = 5

c)

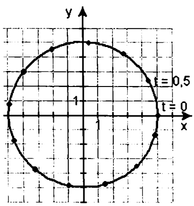
t =	x(t) =	y(t) =
0.0	4.00	-1.00
0.5	3.63	0.44
1.0	2.62	1.52
1.5	1.21	1.99
2.0	-0.25	1.73
2.5	-1.40	0.80
3.0	-1.97	-0.58
3.5	-1.81	-2.05
4.0	-0.96	-3.27
4.5	0.37	-3.93
5.0	1.85	-3.88
5.5	3.13	-3.12
6.0	3.88	-1.84

Kreis mit dem Mittelpunkt M(1/–1) und dem Radius r = 3



6.15 a)

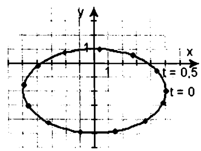
t =	x(t) =	y(t) =
0.0	5.00	0.00
0.5	4.39	2.40
1.0	2.70	4.21
1.5	0.35	4.99
2.0	-2.08	4.55
2.5	-4.01	2.99
3.0	-4.95	0.71
3.5	-4.68	-1.75
4.0	-3.27	-3.78
4.5	-1.05	-4.89
5.0	1.42	-4.79
5.5	3.54	-3.53
6.0	4.80	-1.40



Ursprungskreis mit dem Radius r = 5

b)

t =	x(t) =	y(t) =
0.0	5.00	-2.00
0.5	4.39	-0.56
1.0	2.70	0.52
1.5	0.35	0.99
2.0	-2.08	0.73
2.5	-4.01	-0.20
3.0	-4.95	-1.58
3.5	-4.68	-3.05
4.0	-3.27	-4.27
4.5	-1.05	-4.93
5.0	1.42	-4.88
5.5	3.54	-4.12
6.0	4.80	-2.84

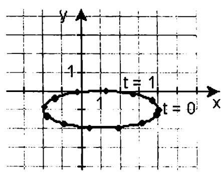


Ellipse mit dem Mittelpunkt M(0/–2) und den Halbachsen a = 5 und b = 3

c)

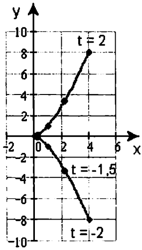
t =	x(t) =	y(t) =
0.0	4.00	-1.00
0.5	3.63	-0.52
1.0	2.62	-0.16
1.5	1.21	-0.00
2.0	-0.25	-0.09
2.5	-1.40	-0.40
3.0	-1.97	-0.86
3.5	-1.81	-1.35
4.0	-0.96	-1.76
4.5	0.37	-1.98
5.0	1.85	-1.96
5.5	3.13	-1.71
6.0	3.88	-1.28

Ellipse mit dem Mittelpunkt M(1/–1) und den Halbachsen a = 3 und b = 1



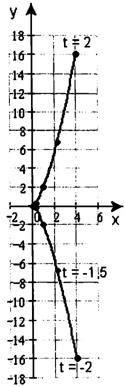
6.16 **a)**

t =	x(t) =	y(t) =
-2.0	4.00	-8.00
-1.5	2.25	-3.38
-1.0	1.00	-1.00
-0.5	0.25	-0.13
0.0	0.00	0.00
0.5	0.25	0.13
1.0	1.00	1.00
1.5	2.25	3.38
2.0	4.00	8.00



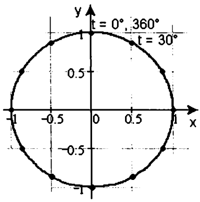
b)

t =	x(t) =	y(t) =
-2.0	4.00	-16.00
-1.5	2.25	-6.75
-1.0	1.00	-2.00
-0.5	0.25	-0.25
0.0	0.00	0.00
0.5	0.25	0.25
1.0	1.00	2.00
1.5	2.25	6.75
2.0	4.00	16.00

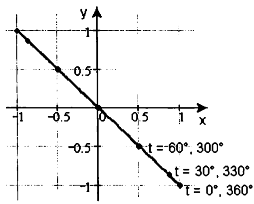


6.17 Punkte auf den Graphen mit einer Schrittweite $\Delta t = \pi/6 = 30°$

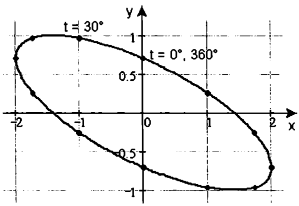
a)



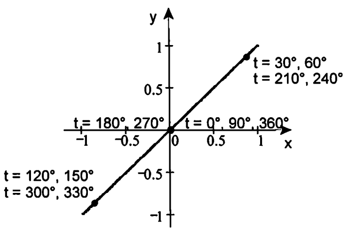
b)



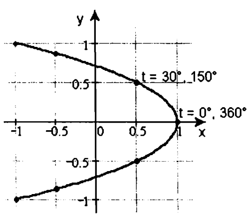
c)



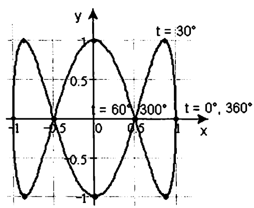
d)



e)



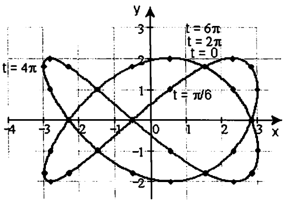
f)



6.18 Punkte auf den Graphen mit einer Schrittweite $\Delta t = \pi/6$

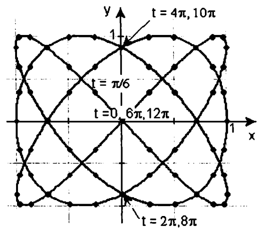
a) $T_x = 2\pi/\omega_x = \dfrac{2\pi}{2/3} = 3\pi$;

$T_y = 2\pi/\omega_y = \dfrac{2\pi}{1} = 2\pi$; voller Durchgang für $0 \le t < 6\pi$ (6π = kleinstes gemeinsames Vielfaches von T_x und T_y)



b) $T_x = 2\pi/\omega_x = \dfrac{2\pi}{1/2} = 4\pi$;

$T_y = 2\pi/\omega_y = \dfrac{2\pi}{2/3} = 3\pi$; voller Durchgang für $0 \le t < 12\pi$ (12π = kleinstes gemeinsames Vielfaches von T_x und T_y)



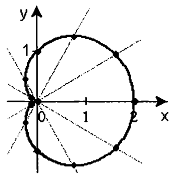
6.19 $r = 20$; $x = r\cdot\cos\varphi$, $y = r\cdot\sin\varphi$; φ = 0°, 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270°, 315°: $A_1(20/0)$; $A_2(14,1/14,1)$; $A_3(0/20)$; $A_4(-14,1/14,1)$; $A_5(-20/0)$; $A_6(-14,1/-14,1)$; $A_7(0/-20)$; $A_8(14,1/-14,1)$

6.20

Punkt	x	y	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	φ mit $\tan\varphi = \dfrac{y}{x}$
M_1	–40	–20	$20\cdot\sqrt{2} = 28{,}3$	206,6°
M_2	–20	20		135
M_3	40	30	50	36,9
M_4	20	–30	$10\cdot\sqrt{13} = 36{,}1$	303,7

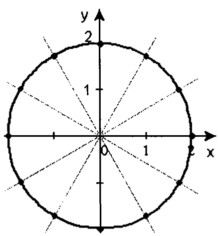
6.21

φ^0	r	φ^0	r
0	2.00	180	0.00
30	1.87	210	0.13
60	1.50	240	0.50
90	1.00	270	1.00
120	0.50	300	1.50
150	0.13	330	1.87



6.22 a)

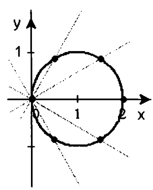
φ^0	r
0	2.00
30	2.00
60	2.00
90	2.00
120	2.00
150	2.00
180	2.00
210	2.00
240	2.00
270	2.00
300	2.00
330	2.00



Urspriungskreis mit dem Radius 2

b)

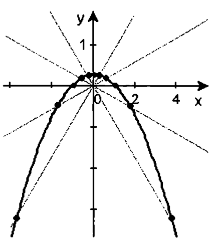
φ^0	r
0	2.00
30	1.73
60	1.00
90	0.00
120	-1.00
150	-1.73
180	-2.00
210	-1.73
240	-1.00
270	0.00
300	1.00
330	1.73



Kreis mit dem Mittelpunkt M(1/0) und dem Radius 1

6.22 c)

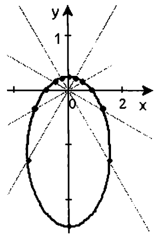
φ^0	r
0	1.0000
30	0.6667
60	0.5359
90	0.5000
120	0.5359
150	0.6667
180	1.0000
210	2.0000
240	7.4641
270	n.d.
300	7.4641
330	2.0000



r geht gegen ∞, wenn $\sin\varphi \to -1$, d. h. $\varphi \to 270°$. Für diesen Winkel ist r nicht definiert. Der Graph ist eine Parabel

d)

φ^0	r
0	0.83
30	0.59
60	0.48
90	0.45
120	0.48
150	0.59
180	0.83
210	1.43
240	2.99
270	5.00
300	2.99
330	1.43



Ellipse

6.23 r geht gegen ∞, wenn $\sin\varphi \to -1$, d. h. $\varphi \to 270°$. Für diesen Winkel ist r nicht definiert (Dvision durch null).

$$r = \frac{1}{1+\sin\varphi};\quad r = \sqrt{x^2+y^2};\quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{1+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}+y}$$

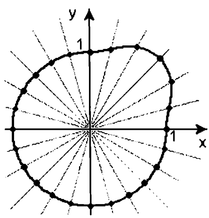
$$\sqrt{x^2+y^2}+y=1;\quad \sqrt{x^2+y^2}=1-y;\quad x^2+y^2=1-2y+y^2;\quad 2y=1-x^2;\quad y=-\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{1}{2};$$

dies ist die Gleichung einer quadratischen Funktion; ihr Graph ist eine sich nach unten öffnende Parabel.

6.24

φ^0	r
0	1.00
15	1.08
30	1.22
45	1.30
60	1.23
75	1.08
90	1.00
105	1.00

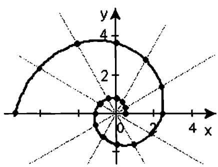
usw. r = 1 stets, Kreislinie



6.25

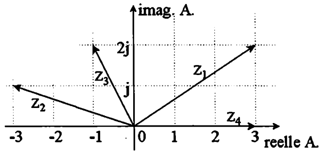
φ^0	r
0	0.50
30	0.57
60	0.65
90	0.74
120	0.84
150	0.96
180	1.10
210	1.25
240	1.42
270	1.62

φ^0	r
300	1.85
330	2.11
360	2.41
390	2.74
420	3.13
450	3.56
480	4.06
510	4.63
540	5.28

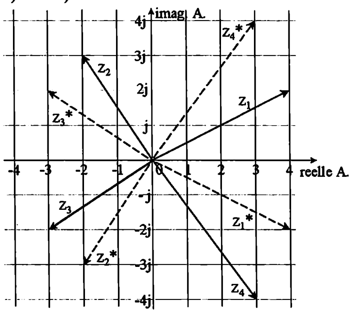


7 Komplexe Zahlen

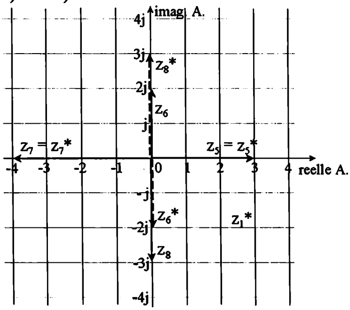
7.1



7.2 **a)** bis **d)**



e) bis **h)**



7.3 $z_1 = z_1^* = 5$; $z_2 = 4 + j,\ z_2^* = 4 - j$; $z_3 = 2j,\ z_3^* = -2j$; $z_4 = -2 + 3j,\ z_4^* = -2 - 3j$;
$z_5 = z_5^* = -3$; $z_6 = -1 - 2j,\ z_6^* = -1 + 2j$; $z_7 = -j,\ z_7^* = j$; $z_8 = 2 - 2j,\ z_8^* = 2 + 2j$

7.4 **a)** $|4 + 2j| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 4{,}472$ **b)** $|-2 + 3j| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13} = 3{,}606$

c) $|-3 - 2j| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13} = 3{,}606$ **d)** $|3 - 4j| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$

e) $|3| = |3 + 0 \cdot j| = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$ **f)** $|2j| = |0 + 2 \cdot j| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$

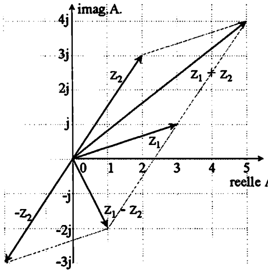
g) $|-4| = |-4 + 0 \cdot j| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 4$ **h)** $|-3j| = |0 - 3 \cdot j| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = 3$

7.5 **a)** Alle Punkte des Kreises mit dem Radius 2, dessen Mittelpunkt im Koordinatenursprung liegt.
b) Alle Punkte, die auf dem Kreis (7.5 a)) oder innerhalb davon liegen.
c) Alle Punkte, die außerhalb des Kreises (7.5 a)) liegen.

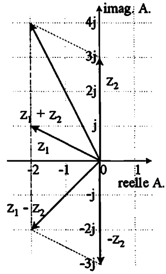
7.6 **a)** $a + j \cdot b = a - j \cdot b \Rightarrow b = -b,\ 2b = 0,\ b = 0$, d.h. z ist reell
b) $a + j \cdot b = -(a - j \cdot b) = -a + j \cdot b \Rightarrow a = -a,\ 2a = 0,\ a = 0$, d.h. z ist imaginär

7.7 **a)** 5-3j **b)** 1+4j **c)** -6+14j **d)** -1+j **e)** -5j **f)** -6+20j

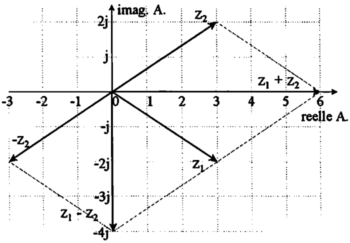
7.8 **a)**



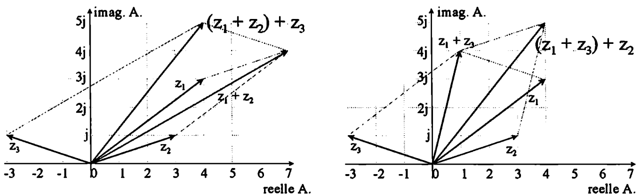
b)



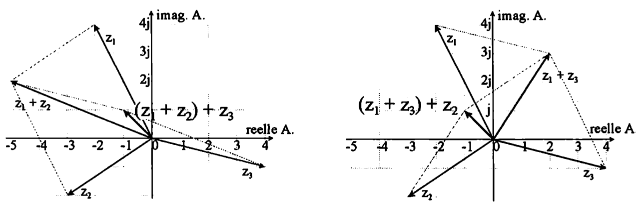
c)



7.9 **a)**



b)



7.10 **a)** $4 + 3j$ **b)** 13 **c)** $-3 - 4j$ **d)** $-7 - 24j$ **e)** $3 + 11j$

f) $(2 - j)^3 = (2 - j)^2 \cdot (2 - j) = (3 - 4j) \cdot (2 - j) = 2 - 11j$ **g)** $j^3 \cdot j = j^4 = j^2 \cdot j^2 = -1 \cdot (-1) = 1$

h) $j^7 \cdot j^1 = j^8 = j^4 \cdot j^4 = 1 \cdot 1 = 1$ **i)** $j^{13} = j^4 \cdot j^4 \cdot j^4 \cdot j = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot j = j$ **j)** $1 + j \cdot 2\sqrt{2}$

k) $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$: $\left(\sqrt{2} + j \cdot \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{2} - j \cdot \sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(j \cdot \sqrt{3}\right)^2 = 2 - j^2 \cdot 3 = 2 - (-1) \cdot 3 = 5$

l) $\left(2\sqrt{3} - j \cdot \sqrt{3}\right)^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot j \cdot \sqrt{3} + \left(j \cdot \sqrt{3}\right)^2 = 12 - 12j + j^2 \cdot 3 = 9 - 12j$

7.11 **a)** $\frac{6+2j}{2}=\frac{6}{2}+\frac{2j}{2}=3+j$ **b)** $\frac{4-j}{2}=\frac{4}{2}-\frac{j}{2}=2-\frac{1}{2}j$

c) $\frac{-3+2j}{3}=-\frac{3}{3}+\frac{2j}{3}=-1+\frac{2}{3}j$ **d)** $\frac{-9-4{,}5j}{1{,}5}=\frac{-9}{1{,}5}-\frac{4{,}5j}{1{,}5}=-6-3j$

7.12 **a)** $\frac{8+j}{1+2j}=\frac{(8+j)\cdot(1-2j)}{(1+2j)\cdot(1-2j)}=\frac{10-15j}{5}=2-3j$

b) $\frac{(13-11j)^*}{1-3j}=\frac{13+11j}{1-3j}=\frac{(13+11j)\cdot(1+3j)}{(1-3j)\cdot(1+3j)}=\frac{-20+50j}{10}=-2+5j$

c) $\frac{-5+5j}{(-2-j)^*}=\frac{-5+5j}{-2+j}=\frac{(-5+5j)\cdot(-2-j)}{(-2+j)\cdot(-2-j)}=\frac{15-5j}{5}=3-j$

d) $\frac{9+12j}{3j}=\frac{(9+12j)(-3j)}{(3j)(-3j)}=\frac{36-27j}{9}=4-3j$

e) $\frac{(3+5j)\cdot(1+j)}{1-4j}=\frac{(-2+8j)(1+4j)}{(1-4j)(1+4j)}=\frac{-34}{17}=-2$

f) $\frac{-43+32j}{(2-3j)^2}=\frac{-43+32j}{-5-12j}=\frac{(-43+32j)(-5+12j)}{(-5-12j)(-5+12j)}=\frac{-169-676j}{169}=-1-4j$

g) $\frac{(1+2j)(3-j)}{(-2+j)(1+j)}=\frac{5+5j}{-3-j}=\frac{(5+5j)(-3+j)}{(-3-j)(-3+j)}=\frac{-20-10j}{10}=-2-j$

h) $\frac{(1-3j)^3}{(-1+3j)^2}=\frac{(1-3j)^2\cdot(1-3j)}{-8-6j}=\frac{-26+18j}{-8-6j}=\frac{(-26+18j)(-8+6j)}{(-8-6j)(-8+6j)}=\frac{100-300j}{100}=1-3j$

7.13 **a)** $|(1+2j)(1-3j)|=|1+2j|\cdot|1-3j|=\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{1^1+(-3)^2}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{5\cdot5\cdot2}=5\cdot\sqrt{2}$

Lösungsvariante: $|(1+2j)(1-3j)|=\left|1-j-6j^2\right|=|7-j|=\sqrt{50}=5\cdot\sqrt{2}$

b) $\left|(1-2j)^2\right|=|1-2j|\cdot|1-2j|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=5$

c) $\left|(1-2j)(1+3j)^2\right|=|1-2j|\cdot|1+3j|\cdot|1+3j|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}=10\cdot\sqrt{5}$

d) $\left|\frac{1-2j}{1-3j}\right|=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}=\sqrt{\frac{5}{10}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}=0{,}707$

e) $\left|\frac{(1-2j)^2}{1+3j}\right|=\frac{|1-2j|\cdot|1-2j|}{|1+3j|}=\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5\cdot2}}=\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}=1{,}581$

f) $\left|\frac{1-2j}{(-1+2j)^2}\right|=\frac{|1-2j|}{|-1+2j|\cdot|-1+2j|}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{5}\cdot\sqrt{5}=0{,}447$

g) $\left|\frac{(3-2j)^3}{3+2j}\right|=\frac{|3-2j|\cdot|3-2j|\cdot|3-2j|}{|3+2j|}=\frac{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}}{\sqrt{13}}=13$

h) $\left|\frac{(3-j)^2}{(7+3j)^2}\cdot(1+7j)\right|=\frac{|3-j|\cdot|3-j|}{|7+3j|\cdot|7+3j|}\cdot|1+7j|=\frac{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}{\sqrt{58}\cdot\sqrt{58}}\cdot\sqrt{50}=\frac{10}{58}\sqrt{5\cdot5\cdot2}=\frac{5}{29}\cdot5\cdot\sqrt{2}=\frac{25}{29}\cdot\sqrt{2}\approx1{,}219$

i) $\left|\frac{(3-j)^3\cdot(7+3j)}{(5+2j)\cdot(2-j)}\right|=\frac{|3-j|\cdot|3-j|\cdot|3-j|\cdot|7+3j|}{|5+2j|\cdot|2-j|}=\frac{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{58}}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{5}}=\frac{10\cdot\sqrt{5\cdot2}\cdot\sqrt{2\cdot29}}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{5}}=\frac{10\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{29}}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{5}}=20$

7.14 **a)** $j+\left(\frac{1}{2-j}\right)^* = j+\left(\frac{1}{2-j}\cdot\frac{2+j}{2+j}\right)^* = j+\left(\frac{2+j}{4+1}\right)^* = j+\left(\frac{2}{5}+j\cdot\frac{1}{5}\right)^* = j+\frac{2}{5}-j\cdot\frac{1}{5} = \frac{2}{5}+j\cdot\frac{4}{5}$;

Realteil: $\frac{2}{5}$, Imaginärteil: $\frac{4}{5}$

b) $\frac{1}{j}+\frac{1}{j^2}+\frac{1}{j^5} = -j+\frac{1}{-1}+\frac{1}{j^4\cdot j} = -j-1+\frac{1}{1\cdot j} = -j-1-j = -1-2j$; Realteil: –1, Imaginärteil: –2

c) $1+\frac{1+2j}{2j}-\frac{j}{5} = 1+\frac{(1+2j)\cdot(-2j)}{2j\cdot(-2j)}-\frac{j}{5} = 1+\frac{-2j-4j^2}{4}-\frac{j}{5} = 1+\frac{-j+2}{2}-\frac{j}{5} = 2-j\cdot\frac{7}{10}$;

Realteil: 2, Imaginärteil: $-\frac{7}{10}$

d) $\left(\frac{1-2j}{5}\right)^{-2} - j^{-2} = \frac{25}{(1-2j)^2}-\frac{1}{j^2} = \frac{25}{-3-4j}+1 = \frac{25\cdot(-3+4j)}{(-3-4j)\cdot(-3+4j)}+1 = \frac{25\cdot(-3+4j)}{25}+1 = -2+4j$;

Realteil: –2, Imaginärteil: 4

e) $\frac{1+j}{1-j}-\frac{1-j}{1+j} = \frac{(1+j)^2-(1-j)^2}{(1-j)\cdot(1+j)} = \frac{2j-(-2j)}{2} = 2j$; Realteil: 0, Imaginärteil: 2

f) $\left(\frac{1+j}{1-j}+\frac{1}{j}\right)\cdot\frac{1-j}{1+j} = 1+\frac{1-j}{j\cdot(1+j)} = 1+\frac{1-j}{-1+j} = 1+\frac{1-j}{-(1-j)} = 1-1 = 0$; Realteil: 0, Imaginärteil: 0

7.15 $j^{-1} = \frac{1}{j} = \frac{j}{j\cdot j} = \frac{j}{-1} = -j$ $\quad j^{-2} = \frac{1}{j^2} = \frac{1}{-1} = -1$ $\quad j^{-3} = \frac{1}{j^3} = \frac{1}{j^2}\cdot\frac{1}{j} = -1\cdot(-j) = j$

$j^{-4} = \frac{1}{j^4} = \frac{1}{j^2}\cdot\frac{1}{j^2} = -1\cdot(-1) = 1$ $\quad j^{-5} = \frac{1}{j^5} = \frac{1}{j^4}\cdot\frac{1}{j} = 1\cdot(-j) = -j$ $\quad j^{-6} = \frac{1}{j^6} = \frac{1}{j^4}\cdot\frac{1}{j^2} = 1\cdot(-1) = -1$

$j^{-7} = \frac{1}{j^7} = \frac{1}{j^4}\cdot\frac{1}{j^3} = 1\cdot j = j$ $\quad j^{-8} = \frac{1}{j^8} = \frac{1}{j^4}\cdot\frac{1}{j^4} = 1\cdot 1 = 1$ $\quad j^{-9} = \frac{1}{j^9} = \frac{1}{j^4}\cdot\frac{1}{j^4}\cdot\frac{1}{j} = 1\cdot 1\cdot(-j) = -j$

7.16 $z_1\cdot z_2 = (a\cdot c-b\cdot d)+(a\cdot d+b\cdot c)\cdot j$; $\quad z_1^*\cdot z_2^* = (a\cdot c-b\cdot d)-(a\cdot d+b\cdot c)\cdot j$; $\quad (z_1\cdot z_2)^* = z_1^*\cdot z_2^*$

7.17 $|z_1| = 10$; $\quad |z_2| = 5$;

$z_1\cdot z_2 = (8+6j)\cdot(3-4j) = 48-14j$; $\quad |z_1\cdot z_2| = |48-14j| = 50 = 10\cdot 5 = |z_1|\cdot|z_2|$;

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(8+6j)\cdot(3+4j)}{(3-4j)\cdot(3+4j)} = \frac{50j}{25} = 2j$; $\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = |2j| = 2 = \frac{10}{5} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

7.18 **a)** $|z| = \sqrt{4^2+b^2} = 5 \Rightarrow b = \pm 3$; $\quad z_1 = 4+3j$; $\quad z_2 = 4-3j$

b) $|z| = \sqrt{9+b^2} = 5 \Rightarrow b = \pm 4$; $\quad z_1 = -3+4j$; $\quad z_2 = -3-4j$

c) $|z| = \sqrt{36+b^2} = 10 \Rightarrow b = \pm 8$; $\quad z_1 = -6+8j$; $\quad z_2 = -6-8j$

7.19 **a)** $x^2-4x+5 = 0$; $\quad x_{12} = 2\pm\sqrt{4-5}$; $\quad x_1 = 2+j$; $\quad x_2 = 2-j$

b) $\frac{x^2}{2}-x+2 = 0$; $\quad x^2-2x+4 = 0$; $\quad x_{12} = 1\pm\sqrt{1-4} = 1\pm j\cdot\sqrt{3}$

c) $x^2+x+1 = 0$; $\quad x_{12} = -\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-1} = -\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot j$

d) $4x^2-5x+10 = 0$; $\quad x_{12} = \frac{5\pm\sqrt{25-160}}{8} = \frac{5}{8}\pm\frac{3\cdot\sqrt{15}}{8}\cdot j$

e) $16x\cdot(1-x) = 13$; $\quad 16x^2-16x+13 = 0$; $\quad x_{12} = \frac{16\pm\sqrt{256-832}}{8} = \frac{16\pm 24\cdot j}{32} = \frac{1}{2}\pm\frac{3}{4}\cdot j$

7.19 **f)** $3x^2 = 2x - \frac{5}{3};\ 9x^2 - 6x + 5 = 0;\ x_{12} = \frac{6\pm\sqrt{36-180}}{18} = \frac{6\pm 12\cdot j}{18} = \frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}\cdot j$

g) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-2} = 1\ (x \neq 1, x \neq 2);\ x-2-(x-1) = (x-1)(x-2);\ x-2-x+1 = x^2-3x+2;$

$x^2-3x+3=0;\ x_{12} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}-3} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot j$

h) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} = 0\ (x \neq -1, x \neq 1, x \neq 0);\ x\cdot(x-1) + x\cdot(x+1) - (x+1)(x-1) = 0;\ x^2+1=0;$

$x^2 = -1;\ x_{12} = \pm j$

7.20 **a)** I: $(1+2j)\cdot z_1 + 3j\cdot z_2 = 2 \ |\cdot(6-j)$

$\underline{\text{II: } 3\cdot z_1 + (6-j)\cdot z_2 = 4 \ |\cdot(-3j)}$

$(8+11j)\cdot z_1 + (3+18j)\cdot z_2 = 12-2j$

$\underline{-9j\cdot z_1 - (3+18j)\cdot z_2 = -12j}$

Addition der Gleichungen:

$(8+2j)\cdot z_1 = 12-14j$

$z_1 = \frac{12-14j}{8+2j} = \frac{6-7j}{4+j} = \frac{(6-7j)\cdot(4-j)}{(4+j)\cdot(4-j)} = 1-2j$

II $\Rightarrow 3\cdot(1-2j) + (6-j)\cdot z_2 = 4;$

$(6-j)\cdot z_2 = 1+6j;\ z_2 = \frac{1+6j}{6-j} = j$

b) I: $(3+2j)\cdot z_1 - j\cdot z_2 = -2+3j \quad |\cdot(2-j)$

$\underline{\text{II: } (1-3j)\cdot z_1 + (2-j)\cdot z_2 = 5\cdot(1-2j) \ |\cdot j}$

$(8+j)\cdot z_1 - (1+2j)\cdot z_2 = -1+8j$

$\underline{(3+j)\cdot z_1 + (1+2j)\cdot z_2 = 10+5j}$

Addition der Gleichungen:

$(11+2j)\cdot z_1 = 9+13j$

$z_1 = \frac{9+13j}{11+2j} = \frac{(9+13j)\cdot(11-2j)}{(11+2j)\cdot(11-2j)} = 1+j$

I $\Rightarrow (3+2j)\cdot(1+j) - j\cdot z_2 = -2+3j;$

$(1+5j) - j\cdot z_2 = -2+3j;\ -j\cdot z_2 = -3-2j$

$j\cdot z_2 = 3+2j;\ z_2 = \frac{3+2j}{j} = 2-3j$

c) I: $4x + 3y = 11+9j$

II: $x + 3z = 2-3j$

$\underline{\text{III: } x+y+z = 3+2j}$

III $\Rightarrow z = 3+2j-y-x,$ in II einsetzen:

I: $4x+3y = 11+9j$

$\underline{\text{II*: } x + 3\cdot(3+2j-y-x) = 2-3j}$

I: $4x+3y = 11+9j$

$\underline{\text{II*: } 2x+3y = 7+9j}$

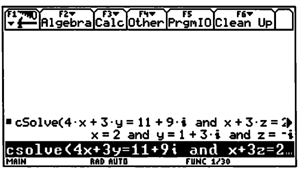
II* mit –1 multiplizieren und zu I* addieren:

$2x = 4;\ x = 2;$

I: $4\cdot 2 + 3y = 11+9j \Rightarrow y = 1+3j;$

III $\Rightarrow z = 3+2j-y-x = -j$

Voyage 200:



d) I: $(1+2j)\cdot x + 2y = 5+3j$

II: $3j\cdot x + y + z = 2+2j$

$\underline{\text{III: } x + (2+3j)\cdot y + (1-j)\cdot z = 8+7j}$

II $\Rightarrow z = 2+2j-3j\cdot x - y,$ in III einsetzen:

I: $(1+2j)\cdot x + 2y = 5+3j$

$\underline{\text{III*: } x+(2+3j)\cdot y+(1-j)\cdot(2+2j-3j\cdot x-y) = 8+7j}$

I: $(1+2j)\cdot x + 2y = 5+3j \ |\cdot(1+4j)$

$\underline{\text{III*: } (-2-3j)\cdot x + (1+4j)\cdot y = 4+7j \ |\cdot(-2)}$

$(-7+6j)\cdot x + (2+8j)\cdot y = -7+23j$

$\underline{(4+6j)\cdot x - (2+8j)\cdot y = -8-14j}$

Addition der Gleichungen:

$(-3+12j)\cdot x = -15+9j$

$x = \frac{-15+9j}{-3+12j} = 1+j;$

I: $(1+2j)\cdot(1+j) + 2y = 5+3j;\ 2y = 6;\ y = 3;$

II $\Rightarrow z = 2+2j-3j\cdot(1+j) - 3 = 2-j$

Mathcad: Vorgabe

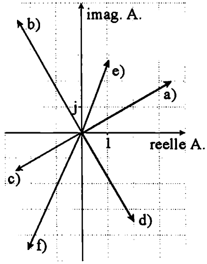
$(1+2j)\cdot x + 2\cdot y = 5+3j$

$3j\cdot x + y + z = 2+2j$

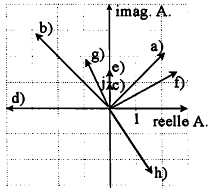
$x + (2+3j)\cdot y + (1-j)\cdot z = 8+7j$

$w := \text{Suchen}(x,y,z) \rightarrow \begin{pmatrix} 1+i \\ 3 \\ 2-i \end{pmatrix}$

7.21



7.22



7.23 **a)** 45° **b)** 135° **c)** 225° **d)** -45° **e)** 90° **f)** 180° **g)** 270° **h)** 0°

7.24 **a)** $e^{j\cdot 90°}$ **b)** $e^{j\cdot 180°}$ **c)** $e^{j\cdot 0°}$ **d)** $e^{j\cdot 270°}$

7.25 **a)** 3j **b)** –2 **c)** –2j **d)** j **e)** –2j **f)** –4

7.26 **a)** $-z = 2\,(\cos 210° + j\sin 210°)$; $\frac{1}{z} = 0.5\,(\cos(-30°) + j\sin(-30°))$

b) $-z = 5\,e^{j\cdot 1{,}25\pi}$; $\frac{1}{z} = 0{,}2\,e^{-j\cdot 0{,}25\pi}$

c) $-z = 0{,}5\cdot(\cos 270° + j\sin 270°)$; $\frac{1}{z} = 2\cdot[\cos(-90°) + j\sin(-90°)]$

d) $-z = 4\cdot(\cos 0° + j\sin 0°)$; $\frac{1}{z} = 0{,}25\cdot[\cos(-180°) + j\sin(-180°)]$

e) $-z = \frac{1}{3}\cdot e^{j\cdot 0{,}75\pi}$; $\frac{1}{z} = 3\cdot e^{j\cdot 0{,}25\pi}$ **f)** $-z = \frac{1}{8}\cdot e^{j\cdot 45°}$; $\frac{1}{z} = 8\cdot e^{j\cdot 135°}$

7.27 **a)** Zeiger im 1. Quadr. $r = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 4{,}472$; $\varphi = \arctan\frac{2}{4} = 26{,}6°$; $z = 4{,}472\cdot e^{j\cdot 26{,}6°}$

b) Zeiger im 2. Quadr., $r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$; $\varphi = \arctan\frac{4}{-3} + 180° = 126{,}9°$; $z = 5\cdot e^{j\cdot 126{,}9°}$

c) Zeiger im 3. Quadr., $r = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = 3{,}606$; $\varphi = \arctan\frac{-2}{-3} + 180° = 213{,}7°$;
$z = 3{,}606\cdot e^{j\cdot 213{,}7°} = 3{,}606\cdot e^{-j\cdot 146{,}3°}$

d) Zeiger im 4. Quadr., $r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$; $\varphi = \arctan\frac{-4}{3} = -53{,}1°$; $z = 5\cdot e^{-j\cdot 53{,}1°}$

e) Zeiger im 2. Quadr., $r = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = 3{,}606$; $\varphi = \arctan\frac{3}{-2} + 180° = 123{,}7°$; $z = 3{,}606\cdot e^{j\cdot 123{,}7°}$

f) Zeiger im 3. Quadr., $r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = 1{,}414$; $\varphi = \arctan\frac{-1}{-1} + 180° = 225°$; $z = 1{,}414\cdot e^{j\cdot 225°}$

g) $r = 3$; $\varphi = 90°$; $z = 3\cdot e^{j\cdot 90°}$ **h)** $r = 5$; $\varphi = -90°$; $z = 5\cdot e^{-j\cdot 90°}$

7.28 **a)** $e^{j\cdot 90°}$ **b)** $2\cdot e^{j\cdot 90°}$ **c)** $3\cdot e^{j\cdot 0°}$ **d)** $4\cdot e^{j\cdot 180°}$ **e)** $e^{-j\cdot 90°}$ **f)** $3\cdot e^{-j\cdot 90°}$

7.29 **a)** $(1 + 2j)\cdot 3\cdot(\cos 45° + j\cdot\sin 45°) = 2{,}236\cdot e^{j\cdot 63{,}4°}\cdot 3\cdot(\cos 45° + j\cdot\sin 45°) = 2{,}236\cdot 3\cdot e^{j\cdot(63{,}4°+45°)} =$
$= 6{,}708\cdot e^{108{,}4°} = -2{,}121 + 6{,}364j$

b) $(2 - j)\cdot e^{j\cdot 150°} = 2{,}236\cdot e^{-26{,}6°}\cdot 1\cdot e^{j\cdot 150°} = 2{,}236\cdot 1\cdot e^{j\cdot(-26{,}6°+150°)} = 2{,}236\cdot e^{j\cdot 123{,}4°} = -1{,}232 + 1{,}866j$

c) $2\cdot(\cos 60° + j\cdot\sin 60°)\cdot 3\cdot e^{j\cdot\pi} = 2\cdot 3\cdot e^{j\cdot(60°+180°)} = 6\cdot e^{j\cdot 240°} = 6\cdot e^{-j\cdot 120°} = -3 - 5{,}196j$

7.30 **a)** $\dfrac{2+4j}{5\cdot e^{j30^\circ}}=\dfrac{4{,}427\cdot e^{j63{,}4^\circ}}{5\cdot e^{j30^\circ}}=0{,}894\cdot e^{j33{,}4^\circ}=0746+0{,}493\,j$

b) $\dfrac{-6+8j}{5\cdot(\cos 90^\circ+j\cdot\sin 90^\circ)}=\dfrac{10\cdot e^{j126{,}9^\circ}}{5\cdot e^{j90^\circ}}=2\cdot e^{j36{,}9^\circ}=1{,}6+1{,}2j$

c) $\dfrac{4\cdot e^{j\cdot\frac{3\pi}{4}}}{5\cdot e^{j60^\circ}}=\dfrac{4\cdot e^{j135^\circ}}{5\cdot e^{j60^\circ}}=0{,}8\cdot e^{j75^\circ}=0{,}207+0{,}773j$

d) $\dfrac{3-2j}{2\angle 30^\circ}=\dfrac{\sqrt{13}\cdot e^{-j33{,}7^\circ}}{2\cdot e^{j30^\circ}}=1{,}883\cdot e^{-j63{,}7^\circ}=0{,}799-1{,}616j$

e) $\dfrac{3\cdot(\cos 60^\circ+j\cdot\sin 60^\circ)\cdot 4\cdot e^{j30^\circ}}{2\cdot(\cos 45^\circ+j\cdot\sin 45^\circ)}=\frac{3\cdot 4}{2}\cdot e^{j(60^\circ+30^\circ-45^\circ)}=6\cdot e^{j45^\circ}=4{,}243+4{,}243j$

f) $\dfrac{(3-2j)\cdot 2\angle 75^\circ}{4\angle 30^\circ}=\dfrac{\sqrt{13}\cdot e^{-j33{,}7^\circ}\,2\cdot e^{j75^\circ}}{4\cdot e^{j30^\circ}}=1{,}803\cdot e^{j11{,}3^\circ}=1{,}768+0{,}354j$

7.31 $z_1=3\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}=3\cdot e^{-j90^\circ}=-3j;\quad z_1^*=3\cdot e^{j90^\circ}=3j;\quad z_2=2\cdot e^{j60^\circ}=1+j\sqrt{3};\quad z_2^*=2\cdot e^{-j60^\circ}=1-j\sqrt{3};$

$z_3=\frac{1}{2}\cdot(\cos(30^\circ)+j\cdot\sin(30^\circ))=0{,}5\cdot e^{j30^\circ}=0{,}433+0{,}25j;\quad z_3^*=0{,}5\cdot e^{-j30^\circ}=0{,}433-0{,}25j$

a) $3\cdot z_1\cdot z_2^*=3\cdot 3\cdot 2\cdot e^{j(-90-60)^\circ}=18\cdot e^{-j150^\circ}=-15{,}588-9j$

b) $\dfrac{z_1^*\cdot z_3}{z_2}=\dfrac{3\cdot 0{,}5}{2}\cdot e^{j(90^\circ+30^\circ-60^\circ)}=0{,}75\cdot e^{j60^\circ}=0{,}375+0{,}650j$

c) $\dfrac{|z_1+z_2|}{3\cdot z_3}=\dfrac{|-3j+1+1{,}732j|}{1{,}5\cdot e^{j30^\circ}}=\dfrac{|1-1{,}268j|}{1{,}5\cdot e^{j30^\circ}}=\dfrac{1{,}615}{1{,}5\cdot e^{j30^\circ}}=1{,}077\cdot e^{-j30^\circ}=0{,}932-0{,}538j$

d) $\dfrac{z_1\cdot z_2}{z_1+z_2}=\dfrac{3\cdot e^{-j90^\circ}\cdot 2\cdot e^{j60^\circ}}{1-1{,}268j}=\dfrac{6\cdot e^{-j30^\circ}}{1{,}615\cdot e^{-j51{,}7^\circ}}=3{,}716\cdot e^{j21{,}7^\circ}=3{,}451+1{,}376j$

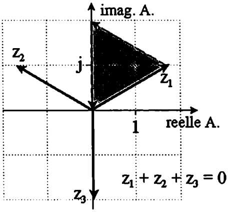
e) $\dfrac{3\cdot e^{-j90^\circ}}{2\cdot e^{j60^\circ}\cdot 0{,}5\cdot e^{j30^\circ}}-\dfrac{1}{3}\cdot e^{j90^\circ}=3\cdot e^{-j180^\circ}-\dfrac{1}{3}\cdot e^{j90^\circ}=-3-0{,}333j=3{,}018\cdot e^{j186{,}3^\circ}=3{,}018\cdot e^{-j173{,}7}$

f) $1+j\cdot\dfrac{z_1^2}{z_2-z_3}=1+j\cdot\dfrac{9\cdot e^{-j180^\circ}}{1+1{,}732j-0{,}433-0{,}25j}=1+j\cdot\dfrac{9\cdot e^{-j180^\circ}}{0{,}567+1{,}482j}=1+j\cdot\dfrac{9\cdot e^{-j180^\circ}}{1{,}587\cdot e^{j69{,}064^\circ}}=$

$=1+e^{j90^\circ}\cdot 5{,}672\cdot e^{-j249{,}1^\circ}=1+5{,}672\cdot e^{-j159{,}1^\circ}=1-5{,}297-2{,}027j=$

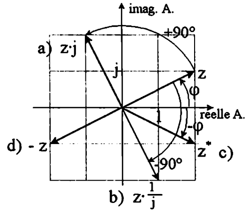
$=-4{,}297-2{,}027j=4{,}751\cdot e^{j205{,}2^\circ}=4{,}751\cdot e^{-j154{,}8^\circ}$

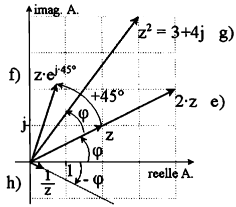
7.32



7.33 Darstellung in der Gauß'schen Zahlenebene unten. Geometrische Deutung:

a) Drehung um 90° **b)** Drehung um -90°
c) Spiegelung an der reellen Achse **d)** Spiegelung am Koord.ursprung
e) Verdoppelung des Betrags **f)** Drehung um 45°
g) Quadrierung des Betrags, Verdoppelung des Winkels **h)** Spiegelung an der reellen Achse, reziproker Betrag





7.34 Multiplikation mit j bedeutet eine Drehung des Zeigers um +90°, Division durch j bedeutet eine Drehung des Zeigers um –90°

a) $2\,(\cos 30° + j\sin 30°)$ **b)** $e^{j\cdot 90°}$ **c)** $3\,(\cos 110° + j\sin 110°)$ **d)** $3\cdot e^{j\cdot 180°} = -3$

7.35 a) $\dfrac{(1+2j)\cdot(3-4j)}{j} = \dfrac{\sqrt{5}\cdot e^{j63,4°}\cdot 5\cdot e^{-j53,1°}}{e^{j90°}} = \sqrt{5}\cdot 5\cdot e^{j(63,4°-53,1°-90°)} = 11{,}180\cdot e^{-79,7°}$;

Betrag: 11,180; Winkel: –79,7°

b) $\dfrac{(1-j)\cdot(3+4j)}{1+j} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot e^{-j45°}\cdot 5\cdot e^{j53,1°}}{\sqrt{2}\cdot e^{j45°}} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot 5}{\sqrt{2}}\cdot e^{j(-45°+53,1°-45°)} = 5\cdot e^{-j36,9°}$; Betrag: 5; Winkel: – 36,9°

c) $\dfrac{-5+2j}{(3-2j)\cdot(4+3j)} = \dfrac{\sqrt{29}\cdot e^{j158,2°}}{\sqrt{13}\cdot e^{-j33,7°}\cdot 5\cdot e^{j36,9°}} = \dfrac{\sqrt{29}}{\sqrt{13}\cdot 5}\cdot e^{j\cdot(158,2°+33,7°-36,9°)} = 0{,}299\cdot e^{j155,0°}$;

Betrag: 0,299; Winkel: 155,0°

d) $\dfrac{(1+2j)^2\cdot j}{2+j} = \dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^2\cdot e^{j(63,4°+63,4°)}\cdot e^{j90°}}{\sqrt{5}\cdot e^{j26,6°}} = \sqrt{5}\cdot e^{j190,3°} = \sqrt{5}\cdot e^{-j169,7°}$;

Betrag: $\sqrt{5} = 2{,}236$; Winkel: –169,7°

e) $\dfrac{(-4+2j)\cdot(-4-3j)}{(1+2j)\cdot j} = \dfrac{\sqrt{20}\cdot e^{j153,4°}\cdot 5\cdot e^{-j143,1°}}{\sqrt{5}\cdot e^{j63,4°}\cdot e^{j90°}} = 10\cdot e^{-j143,1°}$; Betrag: 10; Winkel: –143,1°

f) $\dfrac{(5+9j)\cdot(-12+8j)}{(-1+2j)\cdot(5-3j)} = \dfrac{\sqrt{106}\cdot e^{j60,9°}\cdot\sqrt{208}\cdot e^{j146,3°}}{\sqrt{5}\cdot e^{j116,6°}\cdot\sqrt{34}\cdot e^{-j31,0°}} = 11{,}388\cdot e^{j121,7°}$; Betrag: 11,388; Winkel: 121,7°

7.36 a) $0{,}5\cdot e^{-j\cdot 30°}$ **b)** $0{,}2\cdot e^{-j\cdot 90°}$ **c)** $5\cdot e^{j\cdot 40°}$

7.37 a) $\frac{1}{4}\cdot\left[\cos(-50°) + j\cdot\sin(-50°)\right] = 0{,}25\cdot e^{-j50°} = 0{,}161 - 0{,}192\,j$

b) $z = 4\cdot(\cos 50° - j\cdot\sin 50°) = 4\cdot[\cos(-50°) + j\cdot\sin(-50°)]$;

$\frac{1}{z} = \frac{1}{4}\cdot\left[\cos(+50°) + j\cdot\sin(+50°)\right] = 0{,}25\cdot e^{j50°} = 0{,}161 + 0{,}192\,j$

c) $\frac{1}{2}\cdot\left[\cos(-120°) + j\cdot\sin(-120°)\right] = 0{,}5\cdot e^{-j120°} = -0{,}25 - 0{,}433\,j$

d) $2\cdot\left(\cos 30° + j\cdot\sin 30°\right) = 2\cdot e^{j30°} = \sqrt{3} + j$

e) $\frac{1}{5}\cdot\left[\cos(-\pi) + j\cdot\sin(-\pi)\right] = 0{,}2\cdot e^{-j\pi} = -0{,}2$

f) $\frac{1}{5}\cdot\left(\cos 1{,}2 + j\cdot\sin 1{,}2\right) = 0{,}2\cdot e^{j1,2} = 0{,}072 - 0{,}186\,j$

7.38 Mit der EULER'schen Formel $e^{jx} = \cos x + j \cdot \sin x$ erhält man:

a) $\sinh(jx) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{jx} - e^{-jx}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos x + j \cdot \sin x - \cos x + j \cdot \sin x\right) = j \cdot \sin x$

b) $\cosh(jx) = \frac{1}{2} \cdot \left(e^{jx} + e^{-jx}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos x + j \cdot \sin x + \cos x - j \cdot \sin x\right) = \cos x$

c) $\tanh(jx) = \dfrac{\sinh(jx)}{\cosh(jx)} = \dfrac{j \cdot \sin x}{\cos x} = j \cdot \tan x$

7.39 **a)** $(1+j)^2 = -8 + 6j$ bzw. $(1+3j)^2 = \left(\sqrt{10}\right)^2 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot 71{,}6°} = 10 \cdot e^{j \cdot 143{,}1°} = -8 + 6j$

b) $(2-j)^2 = 3 - 4j$ bzw. $(2-j)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot (-26{,}6°)} = 5 \cdot e^{-j \cdot 53{,}1°} = 3 - 4j$

c) $(-2+3j)^2 = -5 - 12j$ bzw. $(-2+3j)^2 = \left(\sqrt{13}\right)^2 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot 123{,}7°} = 13 \cdot e^{j \cdot 247{,}4°} = 13 \cdot e^{-j \cdot 112{,}6°} = -5 - 12j$

d) $(-4-j)^2 = 15 + 8j$ bzw. $(-4-j)^2 = \left(\sqrt{17}\right)^2 \cdot e^{j \cdot 2 \cdot (-166{,}0°)} = 17 \cdot e^{-j \cdot 331{,}9°} = 17 \cdot e^{j \cdot 28{,}1°} = 15 + 8j$

e) $(2-3j)^3 = -46 - 9j$ bzw. $(2-3j)^3 = \left(\sqrt{13}\right)^3 \cdot e^{j \cdot 3 \cdot (-56{,}3°)} = 46{,}87 \cdot e^{-j \cdot 168{,}9°} = -46 - 9j$

f) $(-1+2j)^3 = 11 - 2j$ bzw. $(-1+2j)^3 = \left(\sqrt{5}\right)^3 \cdot e^{j \cdot 3 \cdot 116{,}6°} = 11{,}18 \cdot e^{j \cdot 349{,}7°} = 11{,}18 \cdot e^{-j \cdot 10{,}3°} = 11 - 2j$

g) $(-2-j)^3 = -2 - 11j$ bzw. $(-2-j)^3 = \left(\sqrt{5}\right)^3 \cdot e^{j \cdot 3 \cdot (-153{,}4°)} = 11{,}18 \cdot e^{-j \cdot 460{,}3°} = 11{,}18 \cdot e^{-j \cdot 100{,}3°} = -2 - 11j$

h) $(-3+j)^3 = -18 + 26j$ bzw.

$$(-3+j)^3 = \left(\sqrt{10}\right)^3 \cdot e^{j \cdot 3 \cdot 161{,}6°} = 31{,}62 \cdot e^{j \cdot 484{,}7°} = 31{,}62 \cdot e^{j \cdot 124{,}7°} = -18 + 26j$$

7.40 **a)** $(1+2j)^3 = \left(\sqrt{5} \cdot e^{j \cdot 63{,}4°}\right)^3 = 11{,}18 \cdot e^{j \cdot 190{,}3°} = 11{,}18 \cdot e^{-j \cdot 169{,}7°} = -11 - 2j$

b) $(-3+4j)^4 = \left(5 \cdot e^{j \cdot 126{,}9}\right)^4 = 625 \cdot e^{j \cdot 507{,}5°} = 625 \cdot e^{j \cdot 147{,}5°} = -527 + 336j$

c) $\left(\dfrac{-6+17j}{3-2j}\right)^3 = \left(\dfrac{\sqrt{325} \cdot e^{j \cdot 109{,}4°}}{\sqrt{13} \cdot e^{-j \cdot 33{,}7°}}\right)^3 = \left(5 \cdot e^{j \cdot 143{,}1°}\right)^3 = 125 \cdot e^{j \cdot 429{,}4°} = 125 \cdot e^{j \cdot 69{,}4°} = 44 + 117j$

d) $(\cos 10° + j \cdot \sin 10°)^3 = \left(e^{j \cdot 10°}\right)^3 = e^{j \cdot 30°} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2} j = 0{,}866 + 0{,}5j$

e) $\left(e^{j \cdot \pi}\right)^5 = e^{j \cdot 5\pi} = e^{j \cdot (5\pi - 4\pi)} = e^{j \cdot \pi} = -1$

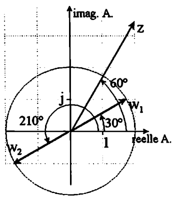
f) $\left[3 \cdot \left(\cos\dfrac{\pi}{6} + j \cdot \sin\dfrac{\pi}{6}\right)\right]^6 = \left(3 \cdot e^{j \frac{\pi}{6}}\right)^6 = 729 \cdot e^{j \cdot \pi} = -729$

g) $\left(2 \cdot e^{-j \cdot 30°}\right)^{12} = 4096 \cdot e^{-j \cdot 360°} = 4096 \cdot e^{j \cdot 0°} = 4096$

h) $\dfrac{e^{j \cdot 60°}}{(\cos 30° + j \cdot \sin 30°)^2} = \dfrac{e^{j \cdot 60°}}{\left(e^{j \cdot 30°}\right)^2} = \dfrac{e^{j \cdot 60°}}{e^{j \cdot 60°}} = 1$

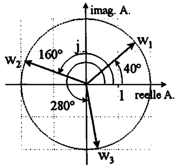
7.41 **a)** 1; −1 **b)** j; −j **c)** 2; −2 **d)** 2j; −2j

7.42 a) $w_1 = \sqrt{4}\cdot e^{j\frac{60°}{2}} = 2\cdot e^{j\cdot 30°}$; $w_2 = \sqrt{4}\cdot e^{j\frac{60°+360°}{2}} = 2\cdot e^{j\cdot 210°}$



b) $w_1 = \sqrt[3]{8}\cdot e^{j\frac{120°}{3}} = 2\cdot e^{j\cdot 40°}$; $w_2 = \sqrt[3]{8}\cdot e^{j\frac{120°+360°}{3}} = 2\cdot e^{j\cdot 160°}$

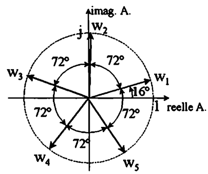
$w_3 = \sqrt[3]{8}\cdot e^{j\frac{120°+2\cdot 360°}{3}} = 2\cdot e^{j\cdot 280°} = = 2\ e^{-j\cdot 80°}$



c) $w_1 = \sqrt[5]{1}\cdot e^{j\frac{80°}{5}} = e^{j\cdot 16°}$; $w_2 = \sqrt[5]{1}\cdot e^{j\frac{80°+360°}{5}} = e^{j\cdot 88°}$;

$w_3 = \sqrt[5]{1}\cdot e^{j\frac{80°+2\cdot 360°}{5}} = e^{j\cdot 160°}$; $w_4 = \sqrt[5]{1}\cdot e^{j\frac{80°+3\cdot 360°}{5}} = e^{j\cdot 232°}$;

$w_5 = \sqrt[5]{1}\cdot e^{j\frac{80°+4\cdot 360°}{5}} = e^{j\cdot 304°}$



7.43 Graphische Darstellung in der Gauß'schen Zahlenebene im Anschluss auf der nächsten Seite.

a) $z = j = 1\cdot e^{j\cdot 90°}$; $w_1 = e^{j\cdot 45°} = \cos 45° + j\cdot\sin 45° = 0{,}707 + 0{,}707j$;
$w_2 = e^{j\cdot(45°+180°)} = e^{j\cdot 225°}\ \cos 225° + j\cdot\sin 225° = -0{,}707 - 0{,}707j$;

b) $z = -1 + j = \sqrt{2}\cdot e^{j\cdot 135°}$; $w_1 = 1{,}122\cdot e^{j\cdot 45°} = 0{,}794 + 0{,}794j$;
$w_2 = 1{,}122\cdot e^{j\cdot(45°+120°)} = -1{,}084 + 0{,}290j$; $w_3 = 1{,}122\cdot e^{j\cdot(45°+2\cdot 120°)} = 0{,}290 - 1{,}084j$

c) $z = 2 - 3j = \sqrt{13}\cdot e^{-j\cdot 56{,}3°} = \sqrt{13}\cdot e^{j\cdot(-56{,}3°+360°)} = \sqrt{13}\cdot e^{j\cdot 303{,}7°}$;
$w_1 = 1{,}378\cdot e^{j\cdot 75{,}9°} = 1{,}378\cdot(\cos 75{,}9° + j\cdot\sin 75{,}9°) = 0{,}335 + 1{,}337j$;
$w_2 = 1{,}378\cdot e^{j\cdot(75{,}9°+90°)} = -1{,}337 + 0{,}335j$; $w_3 = 1{,}378\cdot e^{j\cdot(75{,}9°+2\cdot 90°)} = -0{,}335 - 1{,}337j$;
$w_4 = 1{,}378\cdot e^{j\cdot(75{,}9°+3\ 90°)} = 1{,}337 - 0{,}335j$;

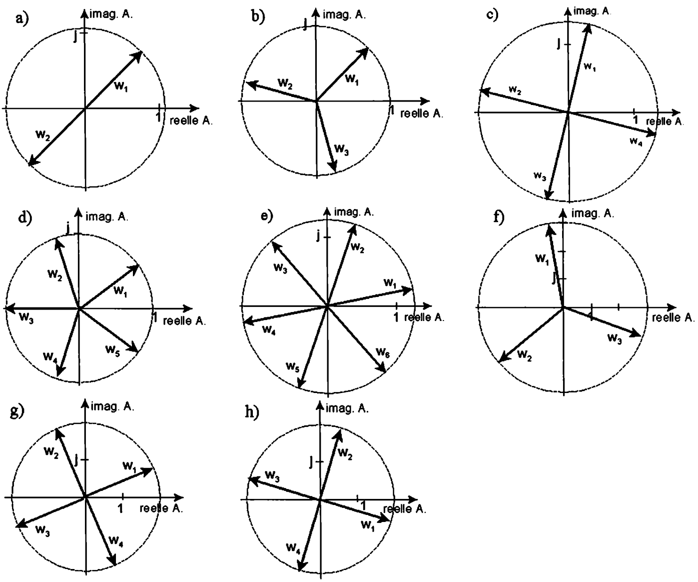
d) $z = -1 = 1\cdot e^{j\cdot 180°}$; $w_1 = e^{j\cdot 180°/5} = e^{j\cdot 36°} = 0{,}809 + 0{,}588j$;
$w_2 = e^{j\cdot(36°+72°)} = -0{,}309 + 0{,}951j$; $w_2 = e^{j\cdot(36°+2\cdot 72°)} = e^{j\cdot 180°} = -1$;
$w_3 = e^{j\cdot(36°+3\cdot 72°)} = e^{j\cdot 252°} = -0{,}309 - 0{,}951j$; $w_4 = e^{j\cdot(36°+4\cdot 72°)} = e^{j\cdot 324°} = 0{,}809 - 0{,}588j$

e) $z = 2 + 4j = \sqrt{20}\cdot e^{j\cdot 63{,}4°}$; $w_1 = 1{,}284\cdot e^{j\cdot(63{,}4°/6)} = 1{,}284\cdot e^{j\cdot 10{,}6°} = 1{,}262 + 0{,}236j$;
$w_2 = 1{,}284\cdot e^{j\cdot(10{,}6°+60°)} = 0{,}427 + 1{,}210j$; $w_3 = 1{,}284\cdot e^{j\cdot(10{,}6°+2\cdot 60°)} = -0{,}835 + 0{,}975j$;
$w_4 = 1{,}284\cdot e^{j\cdot(10{,}6°+3\cdot 60°)} = -1{,}262 - 0{,}236j$; $w_5 = 1{,}284\cdot e^{j\cdot(10{,}6°+4\cdot 60°)} = -0{,}427 - 1{,}210j$;
$w_6 = 1{,}284\cdot e^{j\cdot(10{,}6°+5\cdot 60°)} = 0{,}835 - 0{,}975j$

f) $z = 27\cdot e^{-j\cdot 60°} = 27\cdot e^{j\cdot 300°}$; $w_1 = 3\cdot e^{j\cdot 300°/3} = 3\cdot e^{j\cdot 100°} = -0{,}521 + 2{,}954j$;
$w_2 = 3\cdot e^{j\cdot(100°+120°)} = -2{,}298 - 1{,}928j$; $w_3 = 3\cdot e^{j\cdot(100°+2\cdot 120°)} = 2{,}819 - 1{,}026\,j$

g) $z = 16\cdot e^{j\cdot 1{,}6}$; $w_1 = 2\cdot e^{j\cdot 1{,}6/4} = 2\cdot e^{j\cdot 0{,}40} = 1{,}842 + 0{,}779j$;
$w_2 = 2\cdot e^{j\cdot(0{,}40+\pi/2)} = -0{,}779 + 1{,}842j$; $w_3 = 2\cdot e^{j\cdot(0{,}40+2\cdot\pi/2)} = -1{,}842 - 0{,}779j$;
$w_4 = 2\cdot e^{j\cdot(0{,}40+3\cdot\pi/2)} = 0{,}779 - 1{,}842j$

h) $z = 16\cdot e^{-j\cdot 1{,}2}$; $w_1 = 2\cdot e^{-j\cdot 0{,}3} = 1{,}911 - 0{,}591j$; $w_2 = 2\cdot e^{j\cdot(-0{,}3+\pi/2)} = 0{,}591 + 1{,}911j$;
$w_3 = 2\cdot e^{j\cdot(-0{,}3+2\cdot\pi/2)} = -1{,}911 + 0{,}591j$; $w_4 = 2\cdot e^{j\cdot(-0{,}3+3\cdot\pi/2)} = -0{,}591 - 1{,}911\,j$



7.44 **a)** $w^4 = \left[\frac{1}{2}\cdot(1+j)\right]^4 = -\frac{1}{4}$, somit ist w eine vierte Wurzel von $z = -\frac{1}{4} = \frac{1}{4}\cdot e^{j\cdot 180°}$;

$$w_1 = \sqrt[4]{\frac{1}{4}}\cdot e^{j\cdot 180°/4} = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot e^{j\cdot 45°} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(\cos 45° + j\cdot\sin 45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + j\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot(1+j);$$

$$w_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot e^{j\cdot(45°+90°)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(\cos 135° + j\cdot\sin 135°) = \frac{1}{2}\cdot(-1+j);$$

$$w_3 = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot e^{j\cdot(45°+2\cdot 90°)} = \frac{1}{2}\cdot(-1-j);\quad w_4 = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot e^{j\cdot(45°+3\cdot 90°)} = \frac{1}{2}\cdot(1-j)$$

b) $w^3 = \left(2\cdot e^{j\cdot 20°}\right)^3 = 8\cdot e^{j\cdot 60°}$; $w_1 = \sqrt[3]{8}\cdot e^{j\cdot 20°} = 2\cdot(\cos 20° + j\cdot\sin 20°) = 0{,}816 + 1{,}826j$;

$$w_2 = \sqrt[3]{8}\cdot e^{j\cdot(20°+120°)} = 2\cdot e^{j\cdot 140°} = -0{,}396 + 1{,}960j;$$

$$w_3 = 2\cdot e^{j\cdot(20°+2\cdot 120°)} = 2\cdot e^{j\cdot 260°} = -1{,}460 + 1{,}366j$$

7.45 $(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2$:

$(\cos\varphi + j\cdot\sin\varphi)^2 = \cos^2\varphi + 2\cdot\cos\varphi\cdot(j\cdot\sin\varphi) + j^2\cdot\sin^2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + j\cdot 2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi$.

Andrerseits:

$(\cos\varphi + j\cdot\sin\varphi)^2 = (e^{j\cdot\varphi})^2 = e^{2\cdot j\cdot\varphi} = e^{j\cdot 2\varphi} = \cos 2\varphi + j\cdot\sin 2\varphi$ (Formel von MOIVRE, (Lehrbuch S. 207).

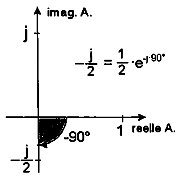
Somit: $\cos 2\varphi + j\cdot\sin 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + j\cdot 2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi \Rightarrow$

$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$ und $\sin 2\varphi = 2\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi$ (Vergleich von Real- und Imaginärteil).

7.46 **a)** $x^2-3j\cdot x-2=0;\quad x_{12}=\frac{3}{2}\cdot j\pm\sqrt{\left(\frac{3}{2}\cdot j\right)^2+2}=\frac{3}{2}\cdot j\pm\sqrt{-\frac{9}{4}+2}=\frac{3}{2}\cdot j\pm\sqrt{-\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}\cdot j\pm\frac{1}{2}\cdot j;$

$x_1=j;\ x_2=2j$

b) $x^2-(1+j)\cdot x+j=0;\quad x_{12}=\frac{1+j}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1+j}{2}\right)^2-j}=\frac{1+j}{2}\pm\sqrt{-\frac{j}{2}};$



$\pm\sqrt{-\frac{j}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\cdot e^{-j90°}}=$ w_1 bzw. w_2:

$w_1=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot e^{-j90°/2}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot e^{-j45°}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot[\cos(-45°)+j\sin(-45°)]=$

$=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}-j\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)=\frac{1-j}{2};$

$w_2=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot e^{j\cdot(-45°+180°)}=\ldots=\frac{-1+j}{2}=-w_1$

$x_1=\frac{1+j}{2}+w_1=\frac{1+j}{2}+\frac{1-j}{2}=1;\quad x_2=\frac{1+j}{2}-w_1=\frac{1+j}{2}-\frac{1-j}{2}=j$

c) $x^2-(1+2j)\cdot x-1+j=0;$

$x_{12}=\frac{1+2j}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1+2j}{2}\right)^2-(-1+j)}=\frac{1+2j}{2}\pm\sqrt{\frac{-3+4j}{4}+1-j}=\frac{1+2j}{2}\pm\frac{1}{2};\ x_1=j;\ x_2=1+j$

7.47 Da die Gleichungen keine komplexen Koeffizienten haben, gibt es zu jeder nichtreellen Lösung auch ihre konjugiert Komplexe als Lösung.

a) $x^3-8=0;\ x=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{8\cdot e^{j\cdot 0°}};$

$x_1=\sqrt[3]{8}\cdot e^{j\cdot 0°}=2;\ x_2=2\cdot e^{j\cdot 120°}=-1+j\cdot\sqrt{3};\quad x_3=2\cdot e^{j\cdot 240°}=-1-j\cdot\sqrt{3}$

b) $x^4-1=0;\ x=\sqrt[4]{1}=\sqrt[4]{1\cdot e^{j\cdot 0°}};$

$x_1=\sqrt[4]{1}\cdot e^{j\cdot 0°/4}=1\cdot(\cos 0°+j\cdot\sin 0°)=1;\ x_2=1\cdot e^{j\cdot 90°}=1\cdot(\cos 90°+j\cdot\sin 90°)=j$

$x_3=1\cdot e^{j\cdot 2\cdot 90°}=1\cdot(\cos 180°+j\cdot\sin 180°)=-1;\ x_4=1\cdot e^{j\cdot 3\cdot 90°}=1\cdot(\cos 270°+j\cdot\sin 270°)=-j$

7.47 c) $x^3+1=0;\ x=\sqrt[3]{-1}=\sqrt[3]{1\cdot e^{j\cdot 180°}};\ x_1=1\cdot e^{j\cdot 180°/3}=e^{j\cdot 60°}=\frac{1}{2}+j\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0{,}5+0{,}866j$

$x_2=e^{j\cdot(60°+120°)}=-1;\ x_3=e^{j\cdot(60°+2\cdot 120°)}=\frac{1}{2}-j\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0{,}5-0{,}866j$

d) $2x^5=8;\ x=\sqrt[5]{4}=\sqrt[5]{4\cdot e^{j\cdot 0°}};\ x_1=\sqrt[5]{4}\cdot e^{j\cdot 0°/5}=\sqrt[5]{4}\cdot e^{j\cdot 0°}=\sqrt[5]{4}=1{,}320;$

$x_2=1{,}320\cdot e^{j\cdot(0°+72°)}=0{,}408+1{,}255j;\quad x_3=1{,}320\cdot e^{j\cdot(0°+2\cdot 72°)}=-1{,}068+0{,}776j;$

$x_4=1{,}320\cdot e^{j\cdot(0°+3\cdot 72°)}=-1{,}068-0{,}776j;\quad x_5=1{,}320\cdot e^{j\cdot(0°+4\cdot 72°)}=0{,}408-1{,}255j$

7.48 **a)** $x^3-4x=x\cdot(x^2-4)=0;$ Produkt – Null – Satz $\Rightarrow$ $x=0$ oder $x^2-4=0$: $x_1=0;\ x_2=2,\ x_3=-2$

b) $x^3+x-2=0;\ x_1=1$ erraten; $\quad x^3+x-2=(x-1)\cdot(x^2+x+2)=0;$

$(x^3+x-2):(x-1)=x^2+x+2$

$\underline{\pm x^3\mp x^2}$

$+x^2+x-2$

$\underline{\pm x^2\mp x}$

$2x-2$

$\underline{\pm 2x\mp 2}$

0

Produkt – Null – Satz $\Rightarrow$ $x-1=0$ oder $x^2+x+2=0$:

$x_1=0;$

$x^2+x+2=0;\ x_{23}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-2}=-\frac{1}{2}\pm j\cdot\frac{\sqrt{7}}{2};$

$x_2=-0{,}5+1{,}323j;\ x_3=-0{,}5-1{,}323j$

7.48 **c)** $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$; $x_1 = 1$ erraten;

$(x^3 - x^2 - x + 1) : (x - 1) = x^2 - 1$
$\underline{\pm x^3 \mp x^2}$
$-x + 1$
$\underline{\mp x \pm 1}$
0

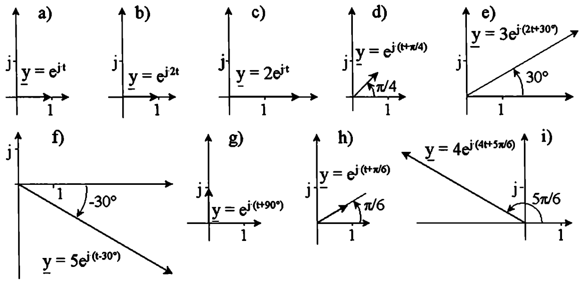
$x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)(x^2-1) = (x-1)\cdot(x-1)\cdot(x+1) = 0$;
Produkt – Null – Satz $\Rightarrow$ $x - 1 = 0$ oder $x + 1 = 0$:
$x_1 = x_2 = 1$ (Doppellösung)
$x_3 = -1$

d) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = 0$; $x_1 = -1$ erraten;

$(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) : (x + 1) = x^2 + x + 1$
$\underline{\pm x^3 \pm x^2}$
$-x^2 + 2x + 1$
$\underline{\mp x^2 \mp x}$
$x + 1$
$\underline{\pm x \pm 1}$
0

$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x+1)\cdot(x^2 + x + 1) = 0$;
Produkt – Null – Satz $\Rightarrow$ $x + 1 = 0$ oder $x^2 + x + 1 = 0$:
$x_1 = -1$;
$x^2 + x + 1 = 0$; $x_{23} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm j \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$;
$x_2 = -0{,}5 + 0{,}866j$; $x_3 = -0{,}5 + 0{,}866j$

7.49



7.50 Die reelle Darstellung, der Zeitwert, ist gleich dem Imaginärteil der komplexen Darstellung.

a) $\underline{y} = 4 \cdot e^{j30°} \cdot e^{j2t} = 4 \cdot e^{j(2t+30°)} = 4 \cdot \cos(2t + 30°) + j \cdot 4 \cdot \sin(2t + 30°)$;
Imaginärteil: $y(t) = 4 \cdot \sin(2t + 30°)$

b) $y = 2 \cdot \sin(2\,t + 90°)$ **c)** $y = 3 \cdot \sin(2\,t)$

7.51 **a)** $y = 2 \cdot \sin(4\,t + 60°)$ **b)** $y = 2 \cdot \sin(4\,t + 90°) = 2 \cdot \cos(4t)$ **c)** $y = 3 \cdot \sin(4\,t + \pi/6)$

7.52 Widerstandswerte in Ω

a) $\underline{Z}_1 = 4 + j \cdot 5$; $\underline{Z}_2 = 8$;

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{(4 + j \cdot 5) \cdot 8}{4 + j \cdot 5 + 8} = \frac{32 + j \cdot 40}{12 + j \cdot 5} = \frac{51{,}22 \cdot e^{j51{,}3°}}{13 \cdot e^{j22{,}6°}} = 3{,}94\,\Omega \cdot e^{j28{,}7°} = 3{,}46\,\Omega + j \cdot 1{,}89\,\Omega$$

b) $\underline{Z}_1 = 4 - j \cdot 5$; $\underline{Z}_2 = 8$;

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{(4 - j \cdot 5) \cdot 8}{4 - j \cdot 5 + 8} = \frac{32 - j \cdot 40}{12 - j \cdot 5} = \frac{51{,}22 \cdot e^{-j51{,}3°}}{13 \cdot e^{-j22{,}6°}} = 3{,}94\,\Omega \cdot e^{-j28{,}7°} = 3{,}46\,\Omega - j \cdot 1{,}89\,\Omega$$

c) $\underline{Z}_1 = 4$; $\underline{Z}_2 = j \cdot 5$; $\underline{Z}_3 = 8$; $\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 4 + \frac{(j \cdot 5) \cdot 8}{j \cdot 5 + 8} = 6{,}25\,\Omega + j \cdot 3{,}60\,\Omega = 7{,}21\,\Omega \cdot e^{j29{,}9°}$

7.52 **d)** $\underline{Z}_1 = 4$; $\underline{Z}_2 = -j \cdot 5$; $\underline{Z}_3 = 8$;

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 4 + \frac{(-j \cdot 5) \cdot 8}{-j \cdot 5 + 8} = 6{,}25\,\Omega - j \cdot 3{,}60\,\Omega = 7{,}21\,\Omega \cdot e^{-j \cdot 29{,}9°}$$

7.53 **a)** $\underline{Y} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4+j \cdot 8} + \frac{1}{-j \cdot 5} + \frac{1}{10} = 0{,}4\,\Omega^{-1} + j \cdot 0{,}1\,\Omega^{-1} = 0{,}412\,\Omega^{-1} \cdot e^{j \cdot 14{,}0°}$;

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = 2{,}43\,\Omega \cdot e^{-j \cdot 14{,}0°} = 2{,}35\,\Omega - j \cdot 0{,}588\,\Omega$$

b) Leitwertoperator der parallel geschalteten Widerstände: $\underline{Y} = \frac{1}{4-j \cdot 5} + \frac{1}{j \cdot 5} + \frac{1}{10} = 0{,}198 - j \cdot 0{,}780$;

$$\underline{Z}_p = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{0{,}198 - j \cdot 0{,}780} = 4{,}378 + j \cdot 1{,}730;$$

$$\underline{Z} = 4 + j \cdot 8 + \underline{Z}_p = 8{,}38\,\Omega + j \cdot 9{,}73\,\Omega = 12{,}84\,\Omega \cdot e^{j \cdot 49{,}3°}$$

7.54 $|100 + j \cdot 2\pi f \cdot 0{,}1| = \sqrt{100^2 + (2\pi f \cdot 0{,}1)^2} = 160{,}6$; $\quad 100^2 + (2\pi f \cdot 0{,}1)^2 = 160{,}6^2$;

$$f = \sqrt{\frac{160{,}6^2 - 100^2}{(2\pi \cdot 0{,}1)^2}} \approx 200{,}0\,\text{Hz}; \quad \tan\varphi = \frac{2\pi f \cdot 0{,}1}{100} \Rightarrow \varphi = 51{,}5°$$

7.55 $\underline{Z} = R - j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}$; $\quad \tan(-30°) = \frac{\operatorname{Im}(\underline{Z})}{\operatorname{Re}(\underline{Z})} = -\frac{1}{\omega \cdot C \cdot R} = -\frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 25 \cdot 10^{-6} \cdot R} = -0{,}577 \Rightarrow R \approx 221\,\Omega$

7.56 $\underline{Z}_1 = j \cdot \omega L = j \cdot 2\pi \cdot 50 \cdot L = j \cdot 100\pi \cdot L$; $\quad \underline{Z}_2 = 200$; $\quad \underline{Z}_3 = -j \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} = -j \cdot \frac{1}{2\pi \cdot 50 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = -j \cdot 63{,}66$;

$$\underline{Z}_4 = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 = 200 - j \cdot 63{,}66;$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_4}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_4} = \frac{j \cdot 100\pi L \cdot (200 - j \cdot 63{,}66)}{j \cdot 100\pi L + (200 - j \cdot 63{,}66)} = \frac{20000 \cdot L + j \cdot 62831{,}9 \cdot L}{200 + j \cdot (100\pi L - 63{,}66)};$$

$$\operatorname{Re}(\underline{Z}) = \frac{1973{,}9 \cdot L^2}{\pi^2 L^2 - 4L + 4{,}405}; \quad \operatorname{Im}(\underline{Z}) = \frac{628{,}32 \cdot L \cdot (2{,}203 - L)}{\pi^2 L^2 - 4L + 4{,}405};$$

$$\tan 45° = 1 = \frac{\operatorname{Im}(\underline{Z})}{\operatorname{Re}(\underline{Z})} = \frac{628{,}32 \cdot (2{,}203 - L)}{1973{,}9 \cdot L} \Rightarrow L = 0{,}53\,\text{H}$$

7.57 $\underline{Z} = R - j \cdot \frac{1}{\omega C}$; $\quad \tan(-50°) = -1{,}192 = \frac{\operatorname{Im}(\underline{Z})}{\operatorname{Re}(\underline{Z})} = \frac{-\frac{1}{2\pi \cdot 600 \cdot C}}{R} = -\frac{2{,}653 \cdot 10^{-4}}{RC} \Rightarrow RC = 2{,}226 \cdot 10^{-4}$

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} = R \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{(2\pi \cdot 600 \cdot RC)^2}} = 1{,}556 \cdot R;$$

Verdopplung von Z: $R \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{(2\pi \cdot f \cdot RC)^2}} = R \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{(2\pi \cdot f \cdot 2{,}226 \cdot 10^{-4})^2}} = 2 \cdot 1{,}556 \cdot R$; durch R

kürzen und quadrieren: $1 + \frac{1}{(2\pi \cdot f \cdot 2{,}226 \cdot 10^{-4})^2} = (2 \cdot 1{,}556)^2 \Rightarrow f \approx 243\,\text{Hz}$.

$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}$ verkleinert sich, wenn bei gleichbleibenden Werten für R und C die Frequenz f größer wird. Z ist am kleinsten, wenn ω und damit f unendlich groß wird.

7.58 $\underline{Z}=R+j\cdot\omega L-j\cdot\frac{1}{\omega\cdot C}$; $Z=\sqrt{R^2+\left(\omega\cdot L-\frac{1}{\omega\cdot C}\right)^2}$; Z ist bei gleichbleibenden Werten von R, L und C am kleinsten, wenn $\omega\cdot L-\frac{1}{\omega\cdot C}$ null ist:

$$\omega\cdot L-\frac{1}{\omega\cdot C}=0 \Rightarrow \omega=2\pi\cdot f=\frac{1}{\sqrt{L\cdot C}};\ f=\frac{1}{2\pi\cdot\sqrt{0{,}4\cdot 50\cdot 10^{-6}}}\approx 36\,\text{Hz}$$

7.59 **a)** $\underline{Y}=\frac{1}{R}-j\cdot\frac{1}{\omega\cdot L}+j\cdot\omega\cdot C=\frac{1}{R}+j\cdot\left(\omega\cdot C-\frac{1}{\omega\cdot L}\right)$;

$$\underline{Z}=\frac{1}{\underline{Y}}=\frac{1}{\frac{1}{R}+j\cdot\left(\omega\cdot C-\frac{1}{\omega\cdot L}\right)}=\frac{\frac{1}{R}-j\cdot\left(\omega\cdot C-\frac{1}{\omega\cdot L}\right)}{\left(\frac{1}{R}+j\cdot\left(\omega\cdot C-\frac{1}{\omega\cdot L}\right)\right)\cdot\left(\frac{1}{R}-j\cdot\left(\omega\cdot C-\frac{1}{\omega\cdot L}\right)\right)}=\frac{\frac{1}{R}-j\cdot\left(\omega\cdot C-\frac{1}{\omega\cdot L}\right)}{\frac{1}{R^2}+\left(\omega\cdot C-\frac{1}{\omega\cdot L}\right)^2}$$

b) $\underline{Z_1}=R_1$; $\underline{Z_2}=j\cdot\omega\cdot L$; $\underline{Z_3}=R_2$;

$$\underline{Z}=\underline{Z_1}+\frac{\underline{Z_2}\cdot\underline{Z_3}}{\underline{Z_2}+\underline{Z_3}}=R_1+\frac{j\cdot\omega\cdot L\cdot R_2}{R_2+j\cdot\omega\cdot L}=R_1+\frac{j\cdot\omega\cdot L\cdot R_2\cdot(R_2-j\cdot\omega\cdot L)}{(R_2+j\cdot\omega\cdot L)\cdot(R_2-j\cdot\omega\cdot L)}=$$

$$=R_1+\frac{\omega^2\cdot L^2\cdot R_2+j\cdot\omega\cdot L\cdot R_2^2}{R_2^2+\omega^2\cdot L^2}=\frac{R_1\cdot\left(R_2^2+\omega^2\cdot L^2\right)+\omega^2\cdot L^2\cdot R_2}{R_2^2+\omega^2\cdot L^2}+j\cdot\frac{\omega\cdot L\cdot R_2^2}{R_2^2+\omega^2\cdot L^2}=$$

$$=\frac{R_1\cdot R_2^2+\omega^2\cdot L^2\cdot(R_1+R_2)}{R_2^2+\omega^2\cdot L^2}+j\cdot\frac{\omega\cdot L\cdot R_2^2}{R_2^2+\omega^2\cdot L^2}$$

c) $\underline{Z_1}=R_1$; $\underline{Z_2}=-j\cdot\frac{1}{\omega\cdot C}$; $\underline{Z_3}=R_2$;

$$\underline{Z}=\underline{Z_1}+\frac{\underline{Z_2}\cdot\underline{Z_3}}{\underline{Z_2}+\underline{Z_3}}=R_1+\frac{-j\cdot\frac{R_2}{\omega\cdot C}}{R_2-j\cdot\frac{1}{\omega\cdot C}}=R_1+\frac{-j\cdot\frac{R_2}{\omega\cdot C}}{\frac{\omega\cdot C\cdot R_2-j}{\omega\cdot C}}=R_1+\frac{-j\cdot R_2}{\omega\cdot C\cdot R_2-j}=$$

$$=R_1+\frac{R_2}{1+j\cdot\omega\cdot C\cdot R_2}=R_1+\frac{R_2\cdot(1-j\cdot\omega\cdot C\cdot R_2)}{(1+j\cdot\omega\cdot C\cdot R_2)\cdot(1-j\cdot\omega\cdot C\cdot R_2)}=R_1+\frac{R_2-j\cdot\omega\cdot C\cdot R_2^2}{1+\omega^2\cdot C^2\cdot R_2^2}=$$

$$=R_1+\frac{R_2}{1+\omega^2\cdot C^2\cdot R_2^2}-j\cdot\frac{\omega\cdot C\cdot R_2^2}{1+\omega^2\cdot C^2\cdot R_2^2}=R_1+\frac{R_2}{1+\omega^2\cdot C^2\cdot R_2^2}-j\cdot\frac{\omega\cdot C\cdot R_2^2}{1+\omega^2\cdot C^2\cdot R_2^2}$$

7.59 d) $\underline{Z_1} = R - j\cdot\frac{1}{\omega\cdot C}$; $\underline{Z_2} = j\cdot\omega\cdot L$; $\quad \underline{Z} = \frac{\underline{Z_1}\cdot\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}} = \frac{\left(R - j\cdot\frac{1}{\omega\cdot C}\right)\cdot j\cdot\omega\cdot L}{R - j\cdot\frac{1}{\omega\cdot C} + j\cdot\omega\cdot L} =$

$$= \frac{\frac{L}{C} + j\cdot\omega\cdot L\cdot R}{R + j\cdot\left(\omega\cdot L - \frac{1}{\omega\cdot C}\right)} = \frac{\left[\frac{L}{C} + j\cdot\omega\cdot L\cdot R\right]\cdot\left[R - j\cdot\left(\omega\cdot L - \frac{1}{\omega\cdot C}\right)\right]}{\left[R + j\cdot\left(\omega\cdot L - \frac{1}{\omega\cdot C}\right)\right]\cdot\left[R - j\cdot\left(\omega\cdot L - \frac{1}{\omega\cdot C}\right)\right]} =$$

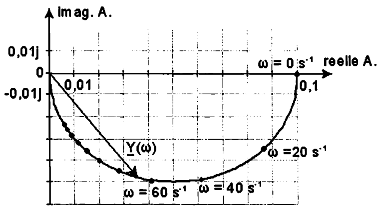
$$= \frac{\frac{L\cdot R}{C} + \omega\cdot L\cdot R\cdot\left(\omega\cdot L - \frac{1}{\omega\cdot C}\right) + j\cdot\left[\omega\cdot L\cdot R^2 - \frac{\omega\cdot L^2}{C} + \frac{L}{\omega\cdot C^2}\right]}{R^2 + \left(\omega\cdot L - \frac{1}{\omega\cdot C}\right)^2} =$$

$$= \frac{\omega\cdot L^2\cdot R}{R^2 + \left(\omega\cdot L - \frac{1}{\omega\cdot C}\right)^2} + j\cdot\frac{\omega\cdot L\cdot R^2 - \frac{L}{C}\cdot\left(\omega\cdot L - \frac{1}{\omega\cdot C}\right)}{R^2 + \left(\omega\cdot L - \frac{1}{\omega\cdot C}\right)^2}$$

7.60 **a)** $z(p) = p + 2j$ mit $0 \le p \le 5$ **b)** $z(p) = 2 - j\cdot p$ mit $-3 \le p \le 0$

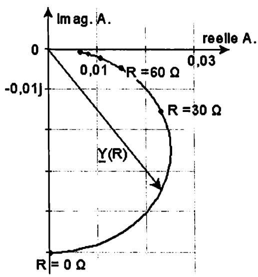
7.61 **a)** $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{10 + j\cdot\omega\cdot 0{,}2}} = \frac{1}{10 + j\cdot 0{,}2\omega} = \frac{10 - j\cdot 0{,}2\omega}{(10 + j\cdot 0{,}2\omega)\cdot(10 - j\cdot 0{,}2\omega)} = \frac{10}{100 + 0{,}04\omega^2} - j\cdot\frac{0{,}2\omega}{100 + 0{,}04\omega^2} = x(\omega) + j\cdot y(\omega)$

$\omega =$	$x(\omega) =$	$y(\omega) =$
0	0.1000	0.0000
20	0.0862	-0.0345
40	0.0610	-0.0488
60	0.0410	-0.0492
80	0.0281	-0.0449
100	0.0200	-0.0400
120	0.0148	-0.0355
140	0.0113	-0.0317
160	0.0089	-0.0285
180	0.0072	-0.0258
200	0.0059	-0.0235



b) $\underline{Y} = \frac{1}{R + j\cdot\omega L} = \frac{1}{R + j\cdot 100\cdot 0{,}2} = \frac{1}{R + j\cdot 20} = \frac{R - j\cdot 20}{(R + j\cdot 20)\cdot(R - j\cdot 20)} = \frac{R}{R^2 + 400} - j\cdot\frac{20}{R^2 + 400} = x(\omega) + j\cdot y(\omega)$

R =	x(R) =	y(R) =
0	0.0000	-0.0500
30	0.0231	-0.0154
60	0.0150	-0.0050
90	0.0106	-0.0024
120	0.0081	-0.0014
150	0.0066	-0.0009



8 Vektorrechnung

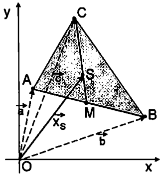
8.1 **a)** $\frac{1}{\sqrt{1^2+0^2}}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ **b)** $\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/5\\4/5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}6\\0{,}8\end{pmatrix}$

c) $\frac{1}{\sqrt{(-2)^2+3^2}}\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{13}}\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0{,}555\\0{,}832\end{pmatrix}$ **d)** $\frac{1}{\sqrt{(-1)^2+(-0{,}5)^2}}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-0{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0{,}894\\-0{,}447\end{pmatrix}$

8.2 $\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}=k_1\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+k_2\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$; lineares Gleichungssystem: I: $7=3k_1-k_2$ und II: $0=k_1+2k_2$

$\Rightarrow k_1=2,\ k_2=-1;\ \begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

8.3



$\vec{x}_S=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MS}$;

$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$; $\overrightarrow{MS}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{MC}=\frac{1}{3}\cdot(\vec{c}-\overrightarrow{OM})=\frac{1}{3}\cdot\left[\vec{c}-\frac{1}{2}\cdot(\vec{a}+\vec{b})\right]$;

$\vec{x}_S=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MS}=\frac{1}{3}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

8.4 **a)** $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot(-1)+1\cdot3=1$ **b)** -5 **c)** -56

8.5 **a)** $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix}-2\\-1\end{pmatrix}$ **d)** $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

8.6 Es gibt zwei Lösungen.

$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}5-0\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$; $\vec{b}_{12}=\overrightarrow{BC}_{12}=\begin{pmatrix}y_3-1\\6-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_3-1\\1\end{pmatrix}$;

$|\vec{a}|=|\vec{b}_{12}|\Rightarrow\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{(y_3-1)^2+1^2}$; $1^2+5^2=(y_3-1)^2+1^2$;

$5^2=(y_3-1)^2$; $y_3-1=\pm5\Rightarrow(y_3)_1=6;\ (y_3)_2=-4$.

Somit: $C_1(6/6)$; $C_2(6/-4)$.

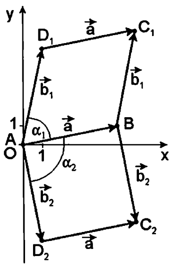
$\overrightarrow{OD_1}=\overrightarrow{OC_1}-\vec{a}=\begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$, d.h. $D_1(1/5)$.

$\overrightarrow{OD_2}=\overrightarrow{OC_2}-\vec{a}=\begin{pmatrix}6\\-4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$, d.h. $D_2(1/-5)$.

$\vec{b}_1=\overrightarrow{BC_1}=\begin{pmatrix}6-5\\6-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$; $\vec{b}_2=\overrightarrow{BC_2}=\begin{pmatrix}6-5\\-4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$

$\cos\alpha_1=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}_1}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}_1|}=\frac{5\cdot1+1\cdot5}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{26}}=0{,}385\Rightarrow\alpha_1=67{,}4°$;

$\cos\alpha_1=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}_2}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}_2|}=\frac{5\cdot1+1\cdot(-5)}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{26}}=0\Rightarrow\alpha_2=90°$



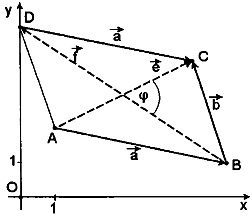
8.7 Seitenvektoren:

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5-6 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$;

Diagonalenvektoren:

$\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 5-1 \\ -1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{f} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} -1-5 \\ 3-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$

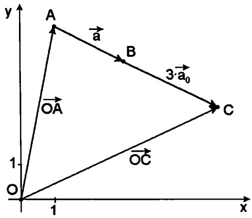
$$\cos\varphi = \frac{\vec{e}\cdot(-\vec{f})}{|\vec{e}|\cdot|-\vec{f}|} = \frac{16}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{52}} = 0{,}496 \Rightarrow \varphi = 60{,}3°$$



8.8 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \vec{a} + 3\cdot\vec{a}_0$;

$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 4-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

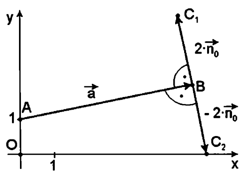
$\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 1+2+3\cdot 2/\sqrt{5} \\ 5-1-3\cdot 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}68 \\ 2{,}66 \end{pmatrix}$, d. h. C(6,68/2,66)



8.9 $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$; Normalvektor zu $\vec{a}$: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, geht durch Linksdrehung aus $\vec{a}$ hervor. Zugehöriger Einheitsvektor: $\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{26}}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}196 \\ 0{,}981 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OB} + 2\cdot\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 4{,}61 \\ 3{,}96 \end{pmatrix}$, d. h. C_1(4,61/3,96).

$\overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{OB} - 2\cdot\vec{n}_0 = \begin{pmatrix} 5{,}39 \\ 0{,}04 \end{pmatrix}$, d. h. C_1(5,39/0,04).



8.10 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sowie $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ stehen normal zu $\vec{a}$, letzterer hat eine positive x–Koordinate.

Gesuchter Normalvektor der Länge 4: $4\cdot\frac{1}{\sqrt{13}}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}22 \\ -3{,}33 \end{pmatrix}$

8.11 $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$; $c^2 = \vec{c}\cdot\vec{c} = \left(\vec{a} - \vec{b}\right)^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} - 2\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{b} = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\varphi$

8.12 **a)** $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $7 = 1 + 3\lambda \Rightarrow \lambda = 2$; $4 = 2 + 1\cdot\lambda \Rightarrow \lambda = 2$; P liegt auf der Geraden

$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $5 = 1 + 3\lambda \Rightarrow \lambda = 4/3$; $2 = 2 + \lambda \Rightarrow \lambda = 0$; Q nicht auf der Geraden

$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $4 = 1 + 3\lambda \Rightarrow \lambda = 1$; $3 = 2 + 1\cdot\lambda \Rightarrow \lambda = 1$; R liegt auf der Geraden

8.12 **b)** $\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ oder $7=5+\mu \Rightarrow \mu=2;\ 4=2-\mu \Rightarrow \mu=-2;$ P nicht auf der Geraden

$\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ oder $5=5+\mu \Rightarrow \mu=0;\ 2=2-\mu \Rightarrow \mu=0;$ Q liegt auf der Geraden

$\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.. oder $4=5+\mu \Rightarrow \mu=-1;\ 3=2-\mu \Rightarrow \mu=-1;$ R liegt auf der Geraden

8.13 **a)** $\begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ oder $4=2+2\lambda \Rightarrow \lambda=1;\ 4=2+\lambda \Rightarrow \lambda=2;$ Q nicht auf der Geraden

$\begin{pmatrix}8\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ oder $8=2+2\lambda \Rightarrow \lambda=3;\ 5=2+\lambda \Rightarrow \lambda=3;$ R liegt auf der Geraden

b) (1) $x=2+2\lambda$; (2) $y=2+\lambda$; (2) $\Rightarrow \lambda=y-2$ in (1) einsetzen: $x=2+2\cdot(y-2);\ y=\frac{1}{2}\cdot x+1$

8.14

a) I: $2+3\lambda=5\mu$
II: $\underline{2\lambda=5-2\mu}$
$\Rightarrow \lambda=1{,}31;$
$\mu=1{,}19;$
$x=2+3\lambda=5{,}94;$
$y=2\lambda=2{,}63;$
S(5,94/2,63)

b) I: $1+3\lambda=5+\mu$
II: $\underline{2+\lambda=2-\mu}$
$\Rightarrow =\lambda=1,\ \mu=-1;$
$x=1+3\lambda=4;$
$y=2+\lambda=3;$
S(4/3)

c) I: $4+3\lambda=-1+2\mu$
II: $\underline{1-2\lambda=3\mu}$
$\Rightarrow \lambda=-1;\ \mu=1;$
$x=3\mu=3;$
$y=-1+2\mu=1;$
S(1/3)

d) I: $1-3\lambda=4+6\mu$
II: $\underline{1+\lambda=2-2\mu}$
II $\Rightarrow \lambda=1-2\mu$, in I einsetzen:
$1-3\cdot(1-2\mu)=4+6\mu;$
$2+6\mu=4+6\mu;$
2 = 4, keine Lösung, kein Schnittpunkt. Die Richtungsvektoren der Geraden sind parallel.

8.15 Der Schnittwinkel zwischen zwei Geraden ist gleich dem Winkel zwischen ihren Richtungsvektoren.

a) $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix};\ \vec{a}_2=\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix};\ \cos\varphi=\frac{\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_1|}=\frac{11}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{29}}=0{,}567 \Rightarrow \varphi=55{,}5°$

b) $\vec{a}_1=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix};\ \vec{a}_2=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix};\ \cos\varphi=\frac{\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_1|}=\frac{0}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}}=0 \Rightarrow \varphi=90°$

c) $k_1=1 \Rightarrow \vec{a}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix};\ k_2=\frac{1}{2} \Rightarrow \vec{a}_2=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix};\ \cos\varphi=\frac{\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|}=\frac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=0{,}949 \Rightarrow \varphi=18{,}4°$

d) $k_1=\frac{1}{2} \Rightarrow \vec{a}_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix};\ k_2=-1 \Rightarrow \vec{a}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix};\ \cos\varphi=\frac{\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|}=\frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}=0{,}316 \Rightarrow \varphi=71{,}6°$

8.16 **a)** $2x+3y=1;\ \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=1$ **b)** $x+2y=10;\ \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=10$

c) $2x+5y=1;\ \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=1$ **d)** $5x+2y=10;\ \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=10$

e) $x=-1+2\mu \Rightarrow \mu=\frac{x+1}{2};\ y=3\mu=\frac{3x+3}{2};\ -3x+2y=3;\ \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=3$

f) $y=1+\lambda \Rightarrow \lambda=y-1;\ x=1-3\lambda=1-3\cdot(y-1);\ x+3y=4;\ \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\cdot\vec{x}=4$

8.17 **a)** A(1/2) ein Punkt auf g; $\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}3-1\\5-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$; Richtungsvektor von g: $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$;

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{a}}{\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|}=\frac{7}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{5}}=0{,}868\Rightarrow\varphi=29{,}7°;\quad d(P,g)=\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\sin\varphi=1{,}79$$

b) x = 0: y = –x/2 + 1 = 1; A(0/1) ist ein Punkt auf g; $\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}5-0\\5-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$;

g: $y=-\frac{x}{2}+1$ in Vektorform umschreiben, etwa: $x = 2\lambda$; $y = -\lambda + 1$;

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$; Richtungsvektor von g: $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$;

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{a}}{\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|}=\frac{6}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{5}}=0{,}419\Rightarrow\varphi=65{,}2°;\quad d(P,g)=\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\sin\varphi=5{,}81$$

c) $2x-3y=6$; $y=\frac{2}{3}\cdot x-2$; $k=\frac{2}{3}$; $x=0$; $y=\frac{2}{3}\cdot x-2=-2$; A(0/–2) ist ein Punkt auf g;

$\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}-4-0\\1-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$; ein Richtungsvektor von g ist $\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2/3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ oder

einfacher $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$; $\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{a}}{\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|}=\frac{-6}{5\cdot\sqrt{13}}=-0{,}333\Rightarrow\varphi=109{,}4°$; $d(P,g)=\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\sin\varphi=4{,}71$

8.18 Man wählt einen (beliebigen) Punkt P auf der einen Geraden und ermittelt seinen Normalabstand zur zweiten Geraden.

a) P(1/1) ein Punkt auf der ersten Geraden; A(4/2) ein Punkt auf der zweiten Geraden;

$\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}1-4\\1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix}$; Richtungsvektor der zweiten Geraden: $\vec{a}=\begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}$;

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{a}}{\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|}=\frac{-16}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{40}}=-0{,}8\Rightarrow\varphi=143{,}1°;\quad d(P,g)=\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\sin\varphi=1{,}90$$

b) x = 0; 2x + 3y = 6 $\Rightarrow$ y = 2; P(0/2) ein Punkt auf der ersten Geraden; x = 3; $y=-\frac{2}{3}\cdot x=-2$;

A(3/–2) ein Punkt auf der zweiten Geraden; $\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}0-3\\2-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$; Richtungsvektor der

zweiten Geraden: $k=-\frac{2}{3}$; $\begin{pmatrix}1\\k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2/3\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ oder einfacher $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$;

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{a}}{\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|}=\frac{-17}{5\cdot\sqrt{13}}=-0{,}943\Rightarrow\varphi=160{,}6°;\quad d(P,g)=\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\sin\varphi=1{,}66$$

8.19 **a)** g: $\vec{x}=\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2-4\\3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$; h bezeichnet die zu g parallele Gerade

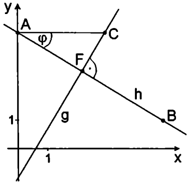
durch P; $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ ist daher ein Richtungsvektor von h; somit h: $\vec{x}=\overrightarrow{OP}+\mu\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$.

In parameterfreier Form: $x = 2 - 2\mu$; $y = 5 + 2\mu$; Addition beider Gleichungen $\Rightarrow x + y = 7$ als Gleichung der zu g parallelen Geraden h.

8.19 **b)** A(1/4) ist ein Punkt von g; $\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}2-1\\5-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$;

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{a}}{\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|}=\frac{0}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}}=0 \Rightarrow \varphi=90°;\ d(P,g)=\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\sin\varphi=\sqrt{2}=1{,}14$$

8.20 **a)** $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}5-0\\1-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$; ein Normalvektor zu $\overrightarrow{AB}$ ist: $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$;



$\vec{n}$ ist ein Richtungsvektor der gesuchten Geraden g; C liegt auf g; g kann daher durch die folgende Gleichung dargestellt werden:

$$\vec{x}=\overrightarrow{OC}+\lambda\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}.$$

Parameterfrei: $x = 3 + 3\lambda \Rightarrow \lambda=\frac{x-3}{3}$; $y=4+5\lambda=4+5\cdot\frac{x-3}{3}$;

also schließlich $y=\frac{5}{3}\cdot x-1$ oder $5x-3y=3$.

b) Gerade h durch A und B: $y = k\cdot x + d$; $d = 4$; $k=-\frac{3}{5}$; $y=-\frac{3}{5}\cdot x+4$; Schnitt g mit h:

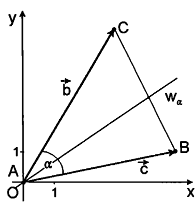
I: $y=\frac{5}{3}\cdot x-1$ und II: $y=-\frac{3}{5}\cdot x+4 \Rightarrow x=\frac{75}{34}\approx 2{,}21$; $y=\frac{91}{34}\approx 2{,}68$; F(2,21/2,68).

$\overline{CF}=\sqrt{(3-75/34)^2+(4-91/34)^2}\approx 1{,}54$

c) $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}3-0\\4-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$ ist ein Richtungsvektor der Geraden h;

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\frac{15}{3\cdot\sqrt{34}}=0{,}857 \Rightarrow \varphi=31{,}0°;\ d(C,h)=\overline{AC}\cdot\sin\varphi\approx 1{,}54$$

8.21 $\vec{c}=\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$; $\vec{c}_0=\frac{1}{\sqrt{26}}\cdot\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$; $\vec{b}_0=\frac{1}{\sqrt{34}}\cdot\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$;



$\vec{u}_0=\vec{b}_0+\vec{c}_0=\begin{pmatrix}5/\sqrt{26}+3/34\\1/\sqrt{26}+5/34\end{pmatrix}$ ist ein Richtungsvektor der Winkelsymmetralen w_α; Gleichung von w_α: $y = k\cdot x + d$; $d = 0$;

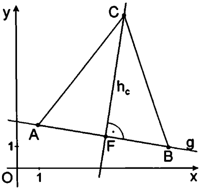
$$k=\frac{1/\sqrt{26}+5/\sqrt{34}}{5/\sqrt{26}+3/\sqrt{34}}=\frac{\sqrt{34}+5\cdot\sqrt{26}}{5\cdot\sqrt{34}+3\cdot\sqrt{26}}\approx 0{,}705;\quad \text{somit: } y=0{,}705\cdot x$$

8.22 Die Streckensymmetrale s geht durch den Mittelpunkt M der Strecke AB; ein Vektor normal zu AB ist Richtungsvektor der Streckensymmetralen.

M((0+5)/2 / (0+1)/2) = M(2,5/0,5); $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}5-0\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$; $\vec{n}=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ ist ein Normalvektor zu $\overrightarrow{AB}$;

Streckensymmetrale s: $\vec{x}=\overrightarrow{OM}+\lambda\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}2{,}5\\0{,}5\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ oder $x = 2{,}5 - \lambda$, $y = 0{,}5 + 5\lambda$;

daraus: $\lambda = 2{,}5 - x$, $y = 0{,}5 + 5\cdot\lambda = -5x + 13$. Somit lautet die Gleichung von s: $y = -5x + 13$.



8.23 **a)** Gerade g durch A und B: Richtungsvektor $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}$;

g: $\vec{x}=\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}$; Normalvektor zu $\overrightarrow{AB}:\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$;

Gerade, auf der die Höhe h liegt: $\vec{x}=\overrightarrow{OC}+\mu\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$;

Schnitt dieser Geraden mit g: $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$;

I: $1+6\lambda=4+\mu$ und II: $2-\lambda=7+6\mu \Rightarrow \lambda=\frac{13}{37}$; $\mu=\ldots$;

$x=1+6\lambda=\frac{115}{37}\approx 3{,}11$; $y=2-\lambda=\frac{61}{37}\approx 1{,}65$; Fußpunkt F(3,11/1,65). Länge $h_c=\overline{CF}=5{,}43$

b) Gerade g durch A und B: Richtungsvektor $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{x}=\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$;

Normalvektor zu $\overrightarrow{AB}$: $\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$; Gerade, auf der die Höhe h liegt: $\vec{x}=\overrightarrow{OC}+\mu\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$;

Schnitt dieser Geraden mit g: $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\8\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ oder

I: $2+5\lambda=2\mu$ und II: $2-2\lambda=8+5\mu \Rightarrow \lambda=-\frac{22}{29}$; $\mu=\ldots$; $x=2+5\lambda=-\frac{52}{29}\approx -1{,}79$;

$y=2-2\lambda=\frac{102}{29}\approx 3{,}52$; Fußpunkt F(–1,79/3,52). Länge $h_c=\overline{CF}=4{,}83$

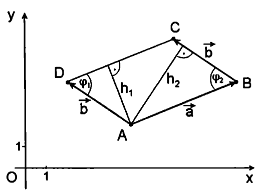
c) Gerade g durch A und B: Richtungsvektor $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{x}=\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$;

Normalvektor zu $\overrightarrow{AB}$: $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$; Gerade, auf der die Höhe h liegt: $\vec{x}=\overrightarrow{OC}+\mu\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$;

Schnitt dieser Geraden mit g: $\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ oder

I: $-1+5\lambda=7+\mu$ und II: $3-\lambda=5+5\mu \Rightarrow \lambda=\frac{19}{13}$; $\mu=\ldots$; $x=-1+5\lambda=\frac{82}{13}\approx 6{,}31$;

$y=3-\lambda=\frac{20}{13}\approx 1{,}54$; Fußpunkt F(6,31/1,54). Länge $h_c=\overline{CF}=3{,}53$



8.24 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$

h_1 ist der Normalabstand von A zur Strecke CD:

$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$; $\overrightarrow{CD}=-\vec{a}$;

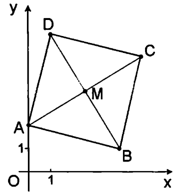
$$\cos\varphi_1=\frac{\vec{b}\cdot(-\vec{a})}{|\vec{b}|\cdot|-\vec{a}|}=\frac{-2\cdot(-4)+2\cdot(-2)}{\sqrt{20}\cdot\sqrt{8}}=0{,}316 \Rightarrow \varphi_1=71{,}6°;$$

$h=\overline{AD}\cdot\sin\varphi_1=\sqrt{8}\cdot\sin\varphi_1=2{,}68$.

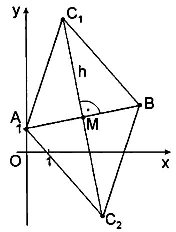
h_2 ist der Normalabstand von A zur Strecke BC: $\varphi_2=\varphi_1$

$h=\overline{AB}\cdot\sin\varphi_2=\sqrt{20}\cdot\sin\varphi_2=4{,}24$.

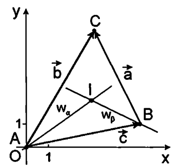
8.25 $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD}$;
Mittelpunkt M((0+5)/2 / (2+5)/2) = M(2,5/3,5);
$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{MD}$ geht aus $\overrightarrow{AM}$ durch Linksdrehung um 90°
hervor: $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix}$: $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$; d.h. D(1/6)
$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{MD}$;
$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$; d.h. B(4/1)



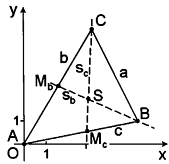
8.26 $\overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC_1}$; Mittelpunkt der Strecke AB: M(2,5/1,5)
$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$; $\vec{n}$ ist ein Vektor, der aus $\overrightarrow{AM}$ durch
Linksdrehung hervorgeht: $\vec{n} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}$;
Einheitsvektor zu $\vec{n}$: $\vec{n}_0 = \frac{2}{\sqrt{26}}\cdot\begin{pmatrix}-0{,}5\\2{,}5\end{pmatrix} = \frac{1}{2{,}550}\cdot\begin{pmatrix}-0{,}5\\2{,}5\end{pmatrix}$;
Seitenlänge $s = \overline{AB} = \sqrt{(5-0)^2+(2-1)^2} = \sqrt{26}$;
Dreieckshöhe $h = \frac{s}{2}\cdot\sqrt{3} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3\cdot 26} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{78}$;
$\overrightarrow{OC_1} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} + h\cdot\vec{n}_0 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{78}\cdot\frac{2}{\sqrt{26}}\cdot\begin{pmatrix}-0{,}5\\2{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1{,}63\\5{,}83\end{pmatrix}$; d.h. C_1(1,63/5,83).
$\overrightarrow{OC_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MC_1} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} - \sqrt{3}\cdot\begin{pmatrix}-0{,}5\\2{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3{,}37\\-2{,}83\end{pmatrix}$; d.h. C_2(3,37/–2,83)



8.27 a) $\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$; $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$; $\vec{a} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$;
zugehörige Einheitsvektoren: $\vec{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{20}}\cdot\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0{,}447\\0{,}894\end{pmatrix}$;
$\vec{b}_0 = \frac{1}{\sqrt{34}}\cdot\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}514\\0{,}857\end{pmatrix}$; $\vec{c}_0 = \frac{1}{\sqrt{26}}\cdot\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}981\\0{,}196\end{pmatrix}$;
$\vec{u} = \vec{b}_0 + \vec{c}_0 = \begin{pmatrix}1{,}495\\1{,}054\end{pmatrix}$ ist Richtungsvektor d. Winkelsymmetralen w_α.
Ihre Steigung: $k_\alpha = \frac{1{,}054}{1{,}495} = 0{,}705$. Somit lautet die Gleichung von w_α: $y = 0{,}705\cdot x$.
$\vec{v} = -\vec{c} + \vec{a} = \begin{pmatrix}-1{,}428\\0{,}698\end{pmatrix}$ ist ein Richtungsvektor der Winkelsymmetralen w_β (Achtung: $-\vec{c}$ verwenden, sonst erhält man die Außenwinkelsymmetrale). Ihre Steigung: $k_\beta = \frac{0{,}698}{-1{,}428} = -0{,}489$.
w_β geht durch B: $y = k_\beta\cdot x + d$; $1 = k_\beta\cdot 5 + d \Rightarrow d = 1 - 5\cdot k_\beta = 3{,}445$.
Somit lautet die Gleichung von w_β : $y = -0{,}489\cdot x + 3{,}445$.
Schnitt w_α und w_β: $0{,}705\cdot x = -0{,}489\cdot x + 3{,}445 \Rightarrow x = 2{,}886$; $y = 0{,}705\cdot x = 2{,}034$;
Inkreismittelpunkt: I(0,29/2,03).



8.27 **b)** Eine Schwerlinie (als Gerade) geht durch den Mittelpunkt einer Seite und den gegenüberliegenden Punkt des Dreiecks.

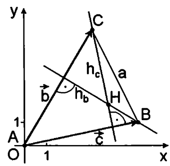


$M_c(2{,}5/0{,}5)$; $\overrightarrow{M_cC} = \begin{pmatrix} 3-2{,}5 \\ 5-0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$ ist ein Richtungsvektor der Schwerlinie s_c; ihre Steigung ist $k_c = \frac{4{,}5}{0{,}5} = 9$. Sie geht durch den Punkt C: $y = k_c \cdot x + d$; $5 = 9 \cdot 3 + d \Rightarrow -22$. Somit lautet die Gleichung der Schwerlinie s_c: $y = 9 \cdot x - 22$.

$M_b(1{,}5/2{,}5)$; $\overrightarrow{M_bB} = \begin{pmatrix} 5-1{,}5 \\ 1-2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$ ist ein Richtungsvektor der Schwerlinie s_b; ihre Steigung ist $k_b = \frac{-1{,}5}{3{,}5} = -\frac{3}{7} \approx -0{,}429$. Sie geht durch den Punkt B: $y = k_b \cdot x + d$; $1 = -0{,}429 \cdot 5 + d \Rightarrow$ $d = \frac{22}{7} \approx 3{,}143$. Somit lautet die Gleichung der Schwerlinie s_c: $y = -0{,}429 \cdot x + 3{,}143$.

Schnitt der beiden Schwerlinien: $9 \cdot x - 22 = -0{,}429 \cdot x + 3{,}143 \Rightarrow x = \frac{8}{3} \approx 2{,}67$; $y = 2$; S(2,67/2)

c) Eine Höhe (als Gerade) steht normal auf eine Seite und geht durch den gegenüberliegenden Punkt des Dreiecks. $\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$; Vektor normal auf $\vec{c}$: $\vec{n}_c = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$; Höhe h_c: $\vec{x} = \overrightarrow{OC} + \lambda \cdot \vec{n}_c = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$;

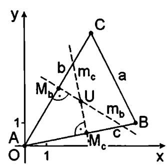


$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$; Vektor normal auf $\vec{b}$: $\vec{n}_b = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$;

Höhe h_b: $\vec{x} = \overrightarrow{OB} + \mu \cdot \vec{n}_b = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$; Schnitt h_c mit h_b: $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ oder

I: $3 - \lambda = 5 - 5\mu$ und II: $5 + 5\lambda = 1 + 3\mu \Rightarrow \lambda = -\frac{7}{11}$; $\mu = \ldots$. $x = 3 - \lambda = 3{,}64$;
$y = 5 + 5\lambda = 1{,}82$; Höhenschnittpunkt H(3,64/1,82)

d) Eine Streckensymmetrale geht durch den Mittelpunkt einer Seite und steht normal zu ihr. $M_c(2{,}5/0{,}5)$; Vektor normal auf $\vec{c}$: $\vec{n}_c = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$;



Streckensymmetrale m_c: $\vec{x} = \overrightarrow{OM_c} + \lambda \cdot \vec{n}_c = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$;

$M_b(1{,}5/2{,}5)$; Vektor normal auf $\vec{b}$: $\vec{n}_b = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$;

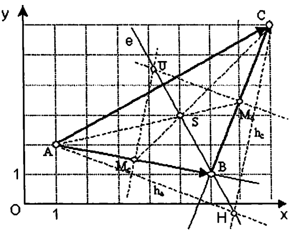
Streckensymmetrale m_b: $\vec{x} = \overrightarrow{OM_b} + \mu \cdot \vec{n}_b = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$; Schnitt m_c mit m_b:

$\begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ oder I: $2{,}5 - \lambda = 1{,}5 - 5\mu$ und II: $0{,}5 + 5\lambda = 2{,}5 + 3\mu$

$\Rightarrow \lambda = \frac{7}{22}$; $\mu = \ldots$. $x = 2{,}5 - \lambda = 2{,}18$; $y = 0{,}5 + 5\lambda = 2{,}09$; Umkreismittelpunkt U(2,18/2,09)

e) Gerade g: $y = k \cdot x + d$ etwa durch H und U: I: $1{,}82 = k \cdot 3{,}64 + d$ und II: $2{,}09 = k \cdot 2{,}18 + d$
$\Rightarrow k = -0{,}18$; $d = 2{,}49$; $y = -0{,}18 \cdot x + 2{,}49$; S auf g ? $2 = -0{,}18 \cdot 2{,}67 + 2{,}49$; $2 = 2{,}01$.
Übereinstimmung im Rahmen der Ungenauigkeit durch Runden. Exakte Übereinstimmung gibt es im Allgemeinen nur bei "symbolischer" Rechnung, d.h. hier bei Verwendung von Brüchen für die Koordinaten der Punkte.

8.28 Schwerpunkt S:



$x_S = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 5$; $y_S = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = 3$; $S(5/3)$;

$\vec{a} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$\vec{n_a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{n_c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, Normalvektoren auf a bzw. c;

Gleichungen der Höhen auf a und c:

$h_a: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \vec{n_a}$; $2x + 5y = 12$;

$h_c: \vec{x} = \overrightarrow{OC} + \mu \cdot \vec{n_c}$; $5x - y = 34$;

Schnitt der beiden Höhen: Höhenschnittpunkt $H\left(\frac{182}{27} \middle| -\frac{8}{27}\right)$ oder H(6,74/–0,30).

$M_a(7/3{,}5)$; $M_c(3{,}5/1{,}5)$; Seitensymmetralen:

$m_a = \vec{x} = \overrightarrow{OM_a} + t \cdot \vec{n_a}$; $2x + 5y = 31{,}5$; $\vec{x} = \overrightarrow{OM_C} + s \cdot \vec{n_c}$; $5x - y = 16$

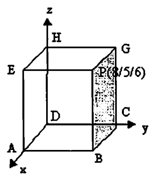
Schnitt der beiden Seitensymmetralen: Umkreismittelpunkt $U\left(\frac{223}{54} \middle| \frac{251}{54}\right)$ oder U(4,13/4,65).

Gerade („Eulersche" Gerade e) durch H und U: $y = -\frac{89}{47} \cdot x + \frac{586}{47}$; Einsetzen der Koordinaten von S bestätigt die Behauptung.

Anmerkung: Rechnet man mit gerundeten Zahlen, so ergibt sich im Allgemeinen keine genaue Übereinstimmung.

8.29 $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{OE} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OG} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$



8.30 a) $\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ c) $\frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ d) $\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

8.31 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4-(-2) \\ 4-2 \\ 5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, d.h. P(1/3/4)

8.32 **a)** $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2-1 \\ 5-1 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$, d.h. P(3/9/7)

b) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$; Einheitsvektor $\vec{v}_0 = \frac{1}{\sqrt{26}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + 3 \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}59 \\ 7{,}35 \\ 5{,}77 \end{pmatrix}$, d.h. P(2,59/7,35/5,77)

8.33 Endpunkte Q_1 und Q_2;

a) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_0 = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OQ_1} = \overrightarrow{OP} + 5 \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1{,}33 \\ 10{,}01 \\ 6{,}34 \end{pmatrix}$, d.h. Q(1,33/10,01/6,34)

bzw. $\overrightarrow{OQ_2} = \overrightarrow{OP} - 5 \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 6{,}67 \\ 1{,}99 \\ 3{,}66 \end{pmatrix}$, d.h. Q_2(6,67/1,99/3,66)

b) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\vec{v}_0 = \frac{1}{\sqrt{29}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OQ_1} = \overrightarrow{OP} + 3 \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 3{,}89 \\ 8{,}23 \\ -1{,}67 \end{pmatrix}$, d.h. Q_1(3,89/8,23/–1,67)

bzw. $\overrightarrow{OQ_2} = \overrightarrow{OP} - 3 \cdot \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 6{,}11 \\ 3{,}77 \\ 1{,}67 \end{pmatrix}$, d.h. Q_2(6,11/3,77/1,67)

8.34 a) $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \begin{pmatrix} 2{,}67 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $S(2{,}67/4/1)$

b) $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$; $S(2/3/6)$

8.35 a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 6+1+0=7$ **b)** $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -6+6+6=6$

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 4+1+4=9$ **d)** $\vec{i} \cdot \vec{j} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0+0+0=0$

8.36 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\left|\vec{a}\right| = 3$; $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1$;

$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = 48{,}2°$; $\cos\beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{1}{3} \Rightarrow \beta = 70{,}5°$;

$\cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{\left|\vec{a}\right|} = \frac{-2}{3} \Rightarrow \gamma = 131{,}8°$

8.37 a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{6}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{10}$; $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{-2+3+0}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{10}} = 0{,}129 \Rightarrow \varphi = 82{,}6°$

b) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\left|\vec{c}\right| = \sqrt{18}$; $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\left|\vec{d}\right| = \sqrt{14}$; $\cos\varphi = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{\left|\vec{c}\right| \cdot \left|\vec{d}\right|} = -0{,}252 \Rightarrow \varphi = 104{,}6°$

c) $\vec{e} = -\vec{a} + 2\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\left|\vec{e}\right| = \sqrt{42}$; $\vec{f} = 3\vec{a} - 2\vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\left|\vec{f}\right| = \sqrt{82}$; $\varphi = 148{,}4°$

8.38 **a)** $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$; $|\vec{a}|=\sqrt{14}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$; $|\vec{b}|=\sqrt{14}$; $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=0{,}357 \Rightarrow \varphi=69{,}1°$

b) $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $|\vec{a}|=\sqrt{2}$ $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$; $|\vec{b}|=\sqrt{2}$; $\cos\varphi=\dfrac{0}{2}=0 \Rightarrow \varphi=90°$

8.39 $\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}$; $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\-1\\6\end{pmatrix}$; $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \Rightarrow$ die drei Vektoren bilden ein Dreieck;

$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\cdot 3+1\cdot(-2)+4\cdot 2=0 \Rightarrow$ die Seitenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen normal aufeinander, die drei Vektoren bilden daher ein rechtwinkliges Dreieck.

8.40 $\vec{v}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$; $\vec{i}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$; $\vec{j}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$; $|\vec{v}|=5$; $|\vec{i}|=|\vec{j}|=1$;

$\cos 50°=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{i}|}=\dfrac{x}{5\cdot 1} \Rightarrow x=5\cdot\cos 50°=3{,}21$; $\cos 130°=\dfrac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{j}|}=\dfrac{y}{5\cdot 1} \Rightarrow y=5\cdot\cos 130°=-3{,}21$;

$|\vec{v}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=5$; $x^2+y^2+z^2=25$; $z_1=+\sqrt{25-x^2-y^2}=2{,}08$;

$z_2=-\sqrt{25-x^2-y^2}=-2{,}08$; $\vec{v_1}=\begin{pmatrix}3{,}21\\-3{,}21\\2{,}08\end{pmatrix}$; $\vec{v_2}=\begin{pmatrix}3{,}21\\-3{,}21\\-2{,}08\end{pmatrix}$

8.41 $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\-2\\2\end{pmatrix}$; $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$;

a) $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\7\\10\end{pmatrix}$; $\vec{v}=r\cdot\vec{a}+s\cdot\vec{b}+t\cdot\vec{c}$ oder

I: $1=2r+3s$
II: $7=r-2s+t$
<u>III: $10=2s+4t$</u>
$\Rightarrow r=2$; $s=-1$; $t=3$; $\vec{v}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$

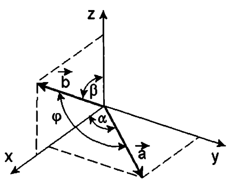
b) $\vec{v}=\begin{pmatrix}5\\-9\\2\end{pmatrix}$; $\vec{v}=r\cdot\vec{a}+s\cdot\vec{b}+t\cdot\vec{c}$ oder

I: $5=2r+3s$
II: $-9=r-2s+t$
<u>III: $2=2s+4t$</u>
$\Rightarrow r=-2$; $s=3$; $t=-1$; $\vec{v}=-2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$

8.42 $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\a_y\\a_x\end{pmatrix}=|\vec{a}|\cdot\begin{pmatrix}\cos 52°\\\sin 52°\\0\end{pmatrix}=|\vec{a}|\cdot\begin{pmatrix}0{,}616\\0{,}788\\0\end{pmatrix}$;

$\vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\b_z\end{pmatrix}=|\vec{b}|\cdot\begin{pmatrix}\sin 20°\\0\\\cos 20°\end{pmatrix}=|\vec{b}|\cdot\begin{pmatrix}0{,}342\\0\\0{,}940\end{pmatrix}$;

$\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\cdot b}=\dfrac{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot(0{,}616\cdot 0{,}342+0+0)}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot}=0{,}211 \Rightarrow \varphi=77{,}8°$



8.43 $z = 45t - 0{,}5g\cdot t^2 = 45t - 5t^2 = 0$; $5t\cdot(9-t) = 0$; Produkt – Null – Satz $\Rightarrow t_1 = 0$ (Zeitpunkt des Abwurfes), $t_2 = 9$ s. Damit lautet der Ortsvektor des Auftreffpunktes: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 20\cdot 9 \\ 20\cdot 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 180 \\ 0 \end{pmatrix}$ m

8.44 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{v} = r\cdot\vec{a} + s\cdot\vec{b} + t\cdot\vec{c}$ oder

I: $0 = 2r - 3s - 2t$
II: $0 = 3s - 2t$
III: $\underline{-2 = -3r - 3s - 3t}$

$\Rightarrow r = \frac{4}{11}$; $s = \frac{4}{33}$; $t = \frac{2}{11}$; $\vec{v} = \frac{2}{33}\cdot\left(6\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}\right)$

8.45 **a)** $\vec{F} = \begin{pmatrix} 310 \\ 240 \\ -350 \end{pmatrix}$; $\vec{s} = \begin{pmatrix} -4 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix}$; $W = \vec{F}\cdot\vec{s} = 310\cdot(-4) + 240\cdot 15 + (-350)\cdot 3 = 1310$ J

b) $\vec{F} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$; $\vec{s} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$; $W = \vec{F}\cdot\vec{s} = -10\cdot 0 + 4\cdot 6 + 8\cdot 4 = 56$ J

8.46 $\vec{F_1} = \begin{pmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{1z} \end{pmatrix}$; $\vec{F_2} = \begin{pmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{2z} \end{pmatrix}$; $F_{1x} = F_1\cdot\cos\alpha_1 = 17{,}4$; $F_{1y} = F_1\cdot\cos\beta_1 = -50$; $F_{1z} = F_1\cdot\cos\gamma_1 = 100\cdot\cos\gamma_1$;

$F_1^2 = F_{1x}^2 + F_{1y}^2 + F_{1z}^2$; $100^2 = 17{,}4^2 + (-50)^2 + 100^2\cdot\cos^2\gamma_1 \Rightarrow \cos\gamma_1 = \pm\sqrt{0{,}7198} = \pm 0{,}848$;
da $\gamma_1 \le 90°$, ist $\cos\gamma_1$ nicht negativ; $\cos\gamma_1 = 0{,}848 \Rightarrow \gamma_1 = 32{,}0°$. $F_{1z} = 100\cdot\cos\gamma_1 = 84{,}8$.
$F_{2x} = F_2\cdot\cos\alpha_2 = 65$; $F_{2y} = F_2\cdot\cos\beta_2 = 99{,}6$; $F_{2z} = F_2\cdot\cos\gamma_2 = 130\cdot\cos\gamma_2$;
$F_2^2 = F_{2x}^2 + F_{2y}^2 + F_{2z}^2$; $130^2 = 65^2 + 99{,}6^2 + 130^2\cdot\cos^2\gamma_2 \Rightarrow \cos\gamma_2 = \pm\sqrt{0{,}1632} = \pm 0{,}404$;
da $\gamma_1 \ge 90°$, ist $\cos\gamma_1$ nicht positiv; $\cos\gamma_2 = -0{,}404 \Rightarrow \gamma_2 = 113{,}8°$. $F_{2z} = 130\cdot\cos\gamma_2 = -52{,}5$.

$\vec{F_1} = \begin{pmatrix} 17{,}4 \\ -50 \\ 84{,}8 \end{pmatrix}$N; $\vec{F_2} = \begin{pmatrix} 65 \\ 99{,}6 \\ -52{,}5 \end{pmatrix}$N; $\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82{,}4 \\ 49{,}6 \\ 32{,}3 \end{pmatrix}$N; $R = \left|\vec{R}\right| = 101{,}4$ N;

$\cos\alpha = \frac{R_x}{R} \Rightarrow \alpha = 35{,}7°$; $\cos\beta = \frac{R_y}{R} \Rightarrow \beta = 60{,}7°$; $\cos\gamma = \frac{R_z}{R} \Rightarrow \gamma = 71{,}4°$

8.47 **a)** $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a}\times 2\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **c)** $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -14 \end{pmatrix}$

8.48 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

8.49 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$; $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 3^2} = 7$; $\vec{b}$ parallel zur (x,y)–Ebene $\Rightarrow b_z = 0$;

$\vec{b}$ normal auf $\vec{a}$ $\Rightarrow \vec{b}\cdot\vec{a} = 2b_x + 6b_y = 0$ oder $b_x = -3\cdot b_y$;

$\left|\vec{b}\right|^2 = b_x^2 + b_y^2 + 0^2 = (-3\cdot b_y)^2 + b_y^2 + 0^2 = 10b_y^2 = 3{,}5^2 \Rightarrow (b_y)_{12} = \pm\frac{3{,}5}{\sqrt{10}} = \pm 1{,}11$;

$b_{x1} = -3\cdot b_{y1} = -3{,}32$; $b_{x2} = -3\cdot b_{y2} = 3{,}32$. Zwei Lösungen: $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} -3{,}320 \\ 1{,}107 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{b_2} = \begin{pmatrix} 3{,}320 \\ -1{,}107 \\ 0 \end{pmatrix}$

8.50 **a)** Seitenvektoren: $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 5-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ 8-5 \\ 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{7}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{14}} = 0{,}367 \Rightarrow \alpha = 68{,}5°$. $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 17 \end{pmatrix}$; Flächeninhalt = $|\vec{a} \times \vec{b}| == 17{,}7$

b) Seitenvektoren: $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-5 \\ 5-1 \\ 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 6-5 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{8}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{3}} = 0{,}906 \Rightarrow \alpha = 25{,}1°$. $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; Flächeninhalt = $|\vec{a} \times \vec{b}| = 3{,}74$

8.51 $\vec{F} = -1{,}6 \cdot 10^{-19} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2000 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0{,}1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3{,}2 \cdot 10^{-17} \end{pmatrix} \text{N}$

8.52 **a)** $\overrightarrow{F_A} = \begin{pmatrix} F_{Ax} \\ F_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{F_B} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_{By} \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \cdot \sin 60° \\ -2 \cdot \cos 60° \\ 0 \end{pmatrix}$; Ortsvektor zu $\vec{F}$: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, zu $\overrightarrow{F_B}$: $\overrightarrow{r_B} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(1) $\sum \vec{F_i} = \vec{0}$: $\overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_B} + \vec{F} = 0$ sowie

(2) $\sum \overrightarrow{M_i} = \vec{0}$ etwa bezüglich A: $(\vec{r} \times \vec{F}) + (\overrightarrow{r_B} \times \overrightarrow{F_B}) = \vec{0}$, $\overrightarrow{F_A}$ gibt keinen Beitrag zum Moment.

Häufige Vorgangsweise bei *ebenen* Problemen (alle Kräfte in der (xy)–Ebene):
In (1) geht man *komponentenweise* vor: Die Summe der (skalaren) Komponenten in x–Richtung ist null, auch jener in y–Richtung (die Betrachtung der z–Richtung kann natürlich entfallen). Weiters sind in (2) nur die Komponenten M_{iz} der Momente, also jene in z–Richtung, ungleich null. Dementsprechend kann man wie folgt rechnen, wenn man die Vektorprodukte umgehen will: Man bildet die Momente der *Beträge* aller Kraftkomponenten bezüglich eines gewählten Bezugspunktes. Dazu ergeben sich die richtigen Vorzeichen, wenn die linksdrehenden Momente positiv, die rechtsdrehenden Momente negativ angesetzt werden!
Auf diese Weise entsteht ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von F_{Ax}, F_{Ay} und F_{By}.

I: $F_{Ax} - 2 \cdot \cos 60° = 0$
II: $F_{Ay} + F_{By} - 2 \cdot \sin 60° = 0$
III: $\underline{6 \cdot F_{By} - 2 \cdot 2 \cdot \sin 60° = 0}$ (Kräfte in x–Richtung ergeben kein Moment)

In III wurde als Bezugspunkt einfachheitshalber A gewählt. $\vec{F}_{By}$ ist linksdrehend, $\vec{F}_y$ mit $|\vec{F}_y| = 2 \cdot \sin 60°$ rechtsdrehend.

$\Rightarrow F_{Ax} = 1$ kN; $F_{Ay} = 1{,}155 \approx 1{,}2$ kN; $F_{By} = 0{,}577 \approx 0{,}6$ kN; $|\overrightarrow{F_A}| = \sqrt{F_{Ax}^2 + F_{Ay}^2} \approx 1{,}5$ kN

b) I: $F_{Ax} - 5 \cdot \cos 60° = 0$
II: $F_{Ay} + F_{By} - 8 - 5 \cdot \sin 60° = 0$
III: $\underline{2{,}4 \cdot F_{By} - 0{,}8 \cdot 8 - 1{,}6 \cdot 5 \cdot \sin 60° = 0}$

$\Rightarrow F_{Ax} = 2{,}5$ kN; $F_{ay} = 6{,}777 \approx 6{,}8$ kN; $F_{By} = 5{,}553 \approx 5{,}6$ kN; $|\overrightarrow{F_A}| = \sqrt{F_{ax}^2 + F_{Ay}^2} \approx 7{,}2$ kN

c) I: $F_{Ax} - 12 \cdot \cos 55° = 0$
II: $F_{Ay} + F_{By} - 8 - 12 \cdot \sin 55° = 0$
III: $\underline{3 \cdot F_{By} - 0{,}8 \cdot 8 - 1{,}6 \cdot 12 \cdot \sin 55° = 0}$

$\Rightarrow F_{Ax} = 6{,}883 \approx 6{,}9$ kN; $F_{ay} = 10{,}454 \approx 10{,}5$ kN; $F_{By} = 7{,}376 \approx 7{,}4$ kN;
$|\overrightarrow{F_A}| = \sqrt{F_{ax}^2 + F_{Ay}^2} \approx 12{,}5$ kN

8.53 **a)** I: $F_{Ax} = 0$

II: $F_{Ay} + F_{By} - 10 = 0$

III: $\underline{8 \cdot F_{By} - 4 \cdot 10 = 0}$

$\Rightarrow F_{Ax} = 0$ kN; $F_{ay} = 5$ kN; $F_{By} = 5$ kN; $\left|\overrightarrow{F_A}\right| = \sqrt{F_{ax}^2 + F_{Ay}^2} = 5$ kN

b) I: $F_{Ax} - 3 \cdot \cos 35° - 2 = 0$

II: $F_{Ay} + F_{By} - 3 \cdot \sin 35° = 0$

III: $\underline{8 \cdot F_{By} + 4 \cdot 3 \cdot \cos 35° - 2 \cdot 3 \sin 35° + 2 \cdot 2 = 0}$

$\Rightarrow F_{Ax} = 4{,}457 \approx 4{,}5$ kN; $F_{ay} = 3{,}019 \approx 3{,}0$ kN; $F_{By} = -1{,}299 \approx -1{,}3$ kN;

$\left|\overrightarrow{F_A}\right| = \sqrt{F_{ax}^2 + F_{Ay}^2} \approx 5{,}4$ kN

c) I: $F_{Ax} + 8 \cdot \cos 40° - 6 \cdot \cos 30° = 0$

II: $F_{Ay} + F_{By} - 8 - 8 \cdot \sin 40° - 6 \cdot \sin 30° = 0$

III: $\underline{4 \cdot F_{By} - 1 \cdot 8 - 2{,}4 \cdot 8 \cdot \cos 40° - 2 \cdot 8 \cdot \sin 40° + 1{,}2 \cdot 6 \cdot \cos 30° - 3 \cdot 6 \cdot \sin 30° = 0}$

$\Rightarrow F_{Ax} = -0{,}932 \approx -0{,}9$ kN; $F_{ay} = 7{,}203 \approx 7{,}2$ kN; $F_{By} = 8{,}939 \approx 8{,}9$ kN;

$\left|\overrightarrow{F_A}\right| = \sqrt{F_{ax}^2 + F_{Ay}^2} \approx 7{,}3$ kN

8.54 **a)** P(3/4/–1) auf g_1? $3 = 2+\lambda \Rightarrow \lambda = 1$; $4 = 2 + 2\lambda \Rightarrow \lambda = 1$; $-1 = 1-2\lambda \Rightarrow \lambda = 1$. P liegt auf g_1

P(3/4/–1) auf g_2? $3 = 1 + 0 \cdot \mu \Rightarrow$ keine Lösung; $4 = 1 + \mu \Rightarrow \mu = 3$; $-1 = 2 - \mu \Rightarrow \mu = 3$

es gibt für die erste Gleichung keinen Wert $\Rightarrow$ P liegt nicht auf g_2

b) Q(1/0/3) auf g_1? $1 = 2+\lambda \Rightarrow \lambda = -1$; $0 = 2 + 2\lambda \Rightarrow \lambda = -1$; $3 = 1-2\lambda \Rightarrow \lambda = -1$, Q auf g_1

Q(1/0/3) auf g_2? $1 = 1 + 0 \cdot \mu \Rightarrow$ jeder Wert für μ löst; $0 = 1 + \mu \Rightarrow \mu = -1$;

$3 = 2 - \mu$; $\mu = -1 \Rightarrow$ Q auf g_2

c) R(1/2/1) auf g_1 ? $1 = 2+\lambda \Rightarrow \lambda = -1$; $2 = 2 + 2\lambda \Rightarrow \lambda = 0$; $1 = 1-2\lambda \Rightarrow \lambda = 0$; R nicht auf g_1

R(1/2/1) auf g_2 ? $1 = 1 + 0 \cdot \mu \Rightarrow$ jeder Wert für μ löst;, $2 = 1 + \mu \Rightarrow \mu = 1$;

$1 = 2 - \mu \Rightarrow \mu = 1 \Rightarrow$ R auf g_2

8.55 **a)** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda = 2: P(1/8/2)$ **b)** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda = 2: P(6/2/3)$

c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda = 2: P(4/2/-2)$

8.56 $g: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5-0 \\ 5-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

8.57 **a)** Schnitt mit (x,y)–Ebene: $z = 0 \Rightarrow 3 + 3\lambda = 0$; $\lambda = -1 \Rightarrow$ P(2/2/0)

Schnitt mit (x,z)–Ebene: $y = 0 \Rightarrow 4 + 2\lambda = 0$; $\lambda = -2 \Rightarrow$ Q(4/0/–3)

Schnitt mit (y,z)–Ebene: $x = 0 \Rightarrow 2\lambda = 0$; $\lambda = 0 \Rightarrow$ R(0/4/3)

b) Schnitt mit (x,y)–Ebene: $z = 0 \Rightarrow 1 - 2\mu = 0$; $\mu = 0{,}5 \Rightarrow$ P(2,5/3/0)

Schnitt mit (x,z)–Ebene: $y = 0 \Rightarrow 2 + 2\mu = 0$; $\mu = -1 \Rightarrow$ Q(1/0/3)

Schnitt mit (y,z)–Ebene: $x = 0 \Rightarrow 2 + \mu = 0$; $\mu = -2 \Rightarrow$ R(0/–2/5)

8.58 $A: 3 = 2 + \mu \Rightarrow \mu = 1$; $y = 2 + 2\mu = 4$; $z = 1 - 2\mu = -1$; $A(3/4-1)$

$B: 0 = 2 + 2\mu \Rightarrow \mu = -1$; $x = 2 + \mu = 1$; $z = 1 - 2\mu = 3$; $B(1/0/3)$

$C: -3 = 1 - 2\mu \Rightarrow \mu = 2$; $x = 2 + \mu = 4$; $y = 2 + 2\mu = 6$; $C(4/6/-3)$

8.59 **a)** $\vec{x}=\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\4\\7\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{x}=\overrightarrow{OA}+\mu\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-5\\6\\1\end{pmatrix}$

c) $\vec{x}=\overrightarrow{OA}+t\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix}$ **d)** $\vec{x}=\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}7\\4\\-3\end{pmatrix}$

8.60 **a)** $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-4\\0\\-3\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$; es gibt kein k, so dass $\overrightarrow{AC}=k\cdot\overrightarrow{AB}\Rightarrow$ A, B, C nicht auf einer Geraden

b) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-3\\-2\\3\end{pmatrix}$; es gibt kein k, so dass $\overrightarrow{AC}=k\cdot\overrightarrow{AB}\Rightarrow$ A, B, C nicht auf einer Geraden

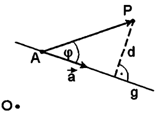
8.61 Der Schnittwinkel φ zweier Geraden g_1 und g_2 ist der Winkel zwischen ihren Richtungsvektoren $\vec{a_1}$ und $\vec{a_2}$: $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a_1}\,\vec{a_2}}{|\vec{a_1}|\cdot|\vec{a_2}|}$

a) $\vec{a_1}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{a_2}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$; $\varphi=129{,}2°$ bzw. $\varphi=50{,}8°$ **b)** $\vec{a_1}=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$; $\vec{a_2}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$; $\varphi=71{,}6°$

8.62 **a)** A auf g: A(22/1);

$\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\end{pmatrix}$; $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$; $\cos(\varphi)=\dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\vec{a}}{|\overrightarrow{AP}|\cdot|\vec{a}|}\Rightarrow\varphi=116{,}4°$;

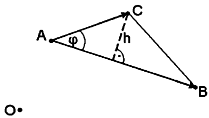
$d(P,g)=|\overrightarrow{AP}|\cdot\sin\varphi=2{,}69$



b) $\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$; $\varphi=11{,}3°$; $d(P,g)=0{,}71$

8.63 **a)** $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}2\\6\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$; $\cos\varphi=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|}\Rightarrow\varphi=17{,}4°$

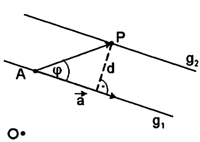
$h=d(P,g)=|\overrightarrow{AC}|\cdot\sin\varphi=1{,}37$



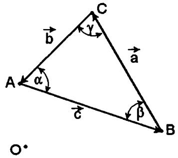
b) $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\-1\\-5\end{pmatrix}$; $\varphi=87{,}3°$; $h=d(P,g)=5{,}09$

8.64 $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; A auf g_1: A(1/2/4); P auf g_2: P(3/0/4); $\overrightarrow{AP}=\begin{pmatrix}2\\-2\\0\end{pmatrix}$

$\cos(\varphi)=\dfrac{\vec{a}\,\overrightarrow{AP}}{|\vec{a}|\cdot|\overrightarrow{AP}|}=\dfrac{0}{\cdots}\Rightarrow\cdots\varphi=90°$; $d(g_1\,g_2)=\overline{AP}=\sqrt{8}\approx2{,}83$



8.65 **a)** $\vec{a}=\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}$; $\vec{b}=\overrightarrow{CA}=\begin{pmatrix}-3\\-7\\-2\end{pmatrix}$; $\vec{c}=\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}5\\5\\0\end{pmatrix}$



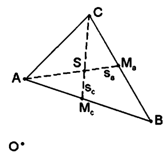
$a=\left|\overrightarrow{BC}\right|=3{,}46$; $b=\left|\overrightarrow{AC}\right|=7{,}87$; $c=\left|\overrightarrow{AB}\right|=7{,}07$

b) $\cos\alpha=\dfrac{\vec{c}\cdot(-\vec{b})}{\left|\vec{c}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}\Rightarrow\alpha=26{,}1°$; $\cos\beta=\dfrac{\left(-\vec{c}\right)\cdot\vec{a}}{\left|\vec{c}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|}\Rightarrow\beta=90{,}0°$

$\cos\gamma=\dfrac{-\vec{a}\cdot\vec{b}}{|a|\cdot|b|}\Rightarrow\gamma=63{,}9°$; $\quad\alpha+\beta+\gamma=180°$

c) Flächeninhalt = $\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cdot\sin\alpha=12{,}2$; *Alternativ*: Flächeninhalt = $\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}10\\-10\\20\end{pmatrix}\right|=12{,}2$

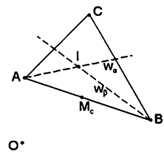
8.66 **a)** $\overrightarrow{OM_c}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}7\\1\\3\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-6\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}$, d.h. $M_c(4/2/2)$;



Schwerlinie s_c: $\vec{x}=\overrightarrow{OM_c}+\lambda\cdot\overrightarrow{M_cC}=\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}$:

b) Einheitsvektoren $\overrightarrow{c_0}$ und $\overrightarrow{b_0}$ zu $\overrightarrow{AB}$ bzw. $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{c_0}=\frac{1}{\sqrt{44}}\cdot\begin{pmatrix}-6\\2\\-2\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{b_0}=\frac{1}{\sqrt{29}}\cdot\begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix}$;



ein Richtungsvektor von w_α: $\overrightarrow{v_\alpha}=\overrightarrow{c_0}+\overrightarrow{b_0}=\begin{pmatrix}-1{,}462\\1{,}044\\0{,}070\end{pmatrix}$;

Gleichung von w_α: $\vec{x}=\overrightarrow{OA}+\lambda_\alpha\cdot\overrightarrow{v_\alpha}=\begin{pmatrix}7\\1\\3\end{pmatrix}+\lambda_\alpha\cdot\begin{pmatrix}-1{,}462\\1{,}044\\0{,}070\end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{OM_a}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2{,}5\\4\\3\end{pmatrix}$, d.h. $M_a(2{,}5/4/3)$;

Schwerlinie s_a: $\vec{x}=\overrightarrow{OM_a}+\mu_a\cdot\overrightarrow{M_aA}=\begin{pmatrix}2{,}5\\4\\3\end{pmatrix}+\mu_a\cdot\begin{pmatrix}4{,}5\\-3\\0\end{pmatrix}$;

Schnitt s_c mit s_a: $\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}+\mu_c\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2{,}5\\4\\3\end{pmatrix}+\mu_a\cdot\begin{pmatrix}4{,}5\\-3\\0\end{pmatrix}$: $4=2{,}5+4{,}5\cdot\mu_a$; $2+3\mu_c=4-3\mu_a$; $2+3\mu_c=3$;

$\Rightarrow\mu_a=\frac{1}{3}$; $\mu_c=\frac{5}{9}$; $x_S=4$: $y_S=2+3\cdot\mu_c=3$; $z_S=2+3\cdot\mu_c=3$; $S(4/3/3)$.

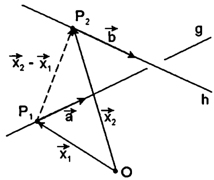
Kontrolle: $\overrightarrow{x_S}=\frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$

8.66 **d)** Einheitsvektoren $\overrightarrow{c_0}$ und $\overrightarrow{a_0}$ zu $\overrightarrow{AB}$ bzw. $\overrightarrow{BC}$: $\overrightarrow{c_0} = \frac{1}{\sqrt{44}} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{a_0} = \frac{1}{\sqrt{29}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$;

Richtungsvektor von w_β: $\overrightarrow{v_\beta} = -\overrightarrow{c_0} + \overrightarrow{a_0} = \begin{pmatrix} -1{,}462 \\ 0.070 \\ 1{,}044 \end{pmatrix}$; w_β: $\vec{x} = \overrightarrow{OB} + \lambda_\beta \cdot \overrightarrow{v_\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_\beta \cdot \begin{pmatrix} -1{,}462 \\ 0{,}070 \\ 1{,}044 \end{pmatrix}$.

Schnitt w_α mit w_β: $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_\alpha \cdot \begin{pmatrix} -1{,}462 \\ 1{,}044 \\ 0{,}070 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_\beta \cdot \begin{pmatrix} -1{,}462 \\ 0{,}070 \\ 1{,}044 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_\alpha = 2{,}053$; I(4,00/3,14/3,14)

8.67 **a)** $\lambda = 0$ und $\mu = 0$ liefern bequem die Punkte P_1 und P_2:



$\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$;

Richtungsvektoren von g bzw. h: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $(\vec{a} \times \vec{b})_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$d(g, h) = \left|(\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})_0\right| = \left|-\sqrt{3}\right| = \sqrt{3} = 1{,}73$

b) P_1 und P_2 einfach für $\lambda = 0$ bzw. $\mu = 0$: $\overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{x_2} = \overrightarrow{OP_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$;

Richtungsvektoren von g bzw. h: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $(\vec{a} \times \vec{b})_0 = \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$d(g, h) = \left|(\overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b})_0\right| = \frac{11}{\sqrt{21}} = 2{,}40$

8.68 **a)** $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda = 2, \mu = -1$: P(1/2/1)

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda = 2, \mu = -1$: P(6/−1/−4)

8.69 **a)** Q(6/5/4):
I: $6 = 5 - \lambda + 2\mu$
II: $5 = 3 + 2\lambda$
<u>III: $4 = 4 + \lambda - \mu$</u>
II $\Rightarrow \lambda = 1$; III $\Rightarrow \mu = \lambda = 1$;
I: $6 = 5 - 1 + 2$
Q in der Ebene

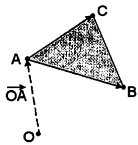
b) Q(3/5/6):
I: $3 = 5 - \lambda + 2\mu$
II: $5 = 3 + 2\lambda$
<u>III: $6 = 4 + \lambda - \mu$</u>
II $\Rightarrow \lambda = 1$; III $\Rightarrow \mu = 1$;
I: $3 \neq 5 - 1 + 2$
Q nicht in der Ebene

c) Q(10/1/1):
I: $10 = 5 - \lambda + 2\mu$
II: $1 = 3 + 2\lambda$
<u>III: $1 = 4 + \lambda - \mu$</u>
II $\Rightarrow \lambda = -1$; III $\Rightarrow \mu = 2$;
I: $10 = 5 + 1 + 4$
Q in der Ebene

8.70 **a)** (1) $x = 1 + \lambda \;\Rightarrow\; \lambda = x - 1$
(2) $y = 2 + \mu \;\Rightarrow\; \mu = y - 2$
(3) $z = 1 - 2\lambda + \mu \;\Rightarrow$
$z = 1 - 2\cdot(x - 1) + y - 2$ oder $2x - y + z = 1$

b) (1) $x = 5 - \lambda + 2\mu$
(2) $y = 3 + 2\lambda \;\Rightarrow\; \lambda = \frac{y-3}{2}$
(3) $z = 4 + \lambda - \mu \;\Rightarrow\; \mu = 4 + \frac{y-3}{2} - z$;
in (1) einsetzen $\Rightarrow 2x - y + 4z = 23$

8.71 **a)** $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda\cdot\overrightarrow{AB} + \mu\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\-2\\2\end{pmatrix}$;



(1) $x = 2 + \lambda - 2\mu$
(2) $y = 3 - \lambda - 2\mu$
(3) $z = -3\lambda + 2\mu$
(1), (2) $\Rightarrow \lambda = \frac{x-y+1}{2}$; $\mu = \frac{5-x-y}{4}$; in (3) einsetzen $\Rightarrow 2x - y + z = 1$

b) $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda\cdot\overrightarrow{AB} + \mu\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}6\\5\\4\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}4\\-4\\-3\end{pmatrix}$;

(1) $x = 6 - 3\lambda + 4\mu$
(2) $y = 5 + 2\lambda - 4\mu$
(3) $z = 4 + 2\lambda - 3\mu$
(1), (2) $\Rightarrow \lambda = 11 - x - y$; $\mu = \frac{27-2x-3y}{4}$; in (3) einsetzen $\Rightarrow 2x - y + 4z = 23$

8.72 **a)** Ebene durch A, B und C: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda\cdot\overrightarrow{AB} + \mu\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\-4\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$

da $\overrightarrow{AB} = 2\cdot\overrightarrow{AC}$, liegen die drei Punkte auf einer Geraden g, nämlich

$\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix} + \lambda\cdot 2\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$ mit $t = 2\lambda + \mu$ als neuem Parameter.

Es ist nun zu untersuchen, ob D(1/1/3) auf dieser Geraden liegt. Wenn nicht, liegen A, B, C und D auf der durch g und D gebildeten Ebene.
(1) $1 = 3 + t \;\Rightarrow\; t = -2$; (2) $1 = 1 - t \;\Rightarrow t = 0$; D liegt daher nicht auf g.

Gleichung der Ebene: $\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} + s\cdot\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}3\\1\\5\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$.

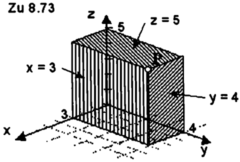
(1) $x = 3 + t - 2s$
(2) $y = 1 - t$
(3) $z = 5 - 2t - 2s$
(1), (2) $\Rightarrow t = 1 - y$; $s = \frac{4-x-y}{2}$; in (3) einsetzen $\Rightarrow x + 3y - z = 1$.
A, B, C und D liegen in dieser Ebene.

b) Ebene durch A, B und C: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + \lambda\cdot\overrightarrow{AB} + \mu\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$.

D(1/1/1) in dieser Ebene? I: $1 = 1 - \lambda - 3\mu$; II: $1 = 1 - 2\lambda$; III: $1 = 2\lambda + 2\mu$;
II $\Rightarrow \lambda = 0$; I $\Rightarrow \mu = 0$; III: $1 \neq 2\cdot 0 + 2\cdot 0 = 0$; D liegt nicht in dieser Ebene.

8.73 a) $z = 5$ **b)** $x = 3$ **c)** $y = 4$

Zu 8.73



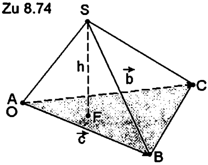
8.74 Pyramidenvolumen $V = \frac{1}{3} \cdot A_{ABC} \cdot h$; Ebene ABC:

$$\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix};\ \vec{b} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix};\ \vec{x} = \lambda \cdot \vec{c} + \mu \cdot \vec{b} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Flächeninhalt A_{ABC}:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\vec{c} \times \vec{b}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -25 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{761} = 13{,}79;$$

Zu 8.74



Normale durch S auf die Ebene ABC: Normalenvektor

$$\vec{n} = \vec{c} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -25 \end{pmatrix};\ \vec{x} = \overrightarrow{OS} + t \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -25 \end{pmatrix};$$

Schnitt der Normalen mit der Ebene ABC ergibt F:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \\ -25 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} \text{I: } 2-6t=5\mu \\ \text{II: } 3+10t=5\lambda+3\mu \\ \text{III: } 1-25t=2\lambda \end{matrix}$$

Lösung dieses linearen Gleichungssystems: $t = \frac{7}{761}$; $\lambda = ...$; $\mu = ...$; $x_F = 2 - 6t = 1{,}94$;

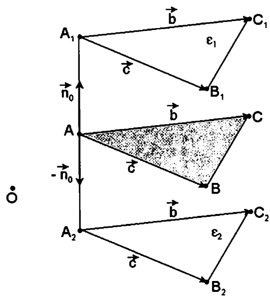
$y_F = 3 + 10t = 3{,}09$; $z_F = 1 - 25t = 0{,}77$; F(1,94/3,09/0,77); $h = \overline{SF} = \sqrt{(2-1{,}94)^2 + \ldots} = 0{,}254$;

$V = \frac{1}{3} \cdot A_{ABC} \cdot h = 13{,}79 = 1{,}17$

8.75 Normalenvektor auf die Ebene ABC:

$$\vec{n} = \vec{c} \times \vec{b} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{n_0} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA} + \sqrt{3} \cdot \overrightarrow{n_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$



sind je ein Punkt der gesuchten Parallelebenen ε_1 und ε_2 .

ε_1: $\vec{x} = \overrightarrow{OA_1} + \lambda \cdot \vec{c} + \mu \cdot \vec{b}$; ε_2: $\vec{x} = \overrightarrow{OA_2} + \lambda \cdot \vec{c} + \mu \cdot \vec{b}$.

ε_1 parameterfrei:

(1) $x = 1 + \lambda \Rightarrow \lambda = x - 1$

(2) $y = 1 + \mu \Rightarrow \mu = y - 1$

(3) $z = 2 - \lambda - \mu = 2 - (x-1) - (y-1)$ oder

ε_1: $x + y + z = 4$

ε_2 parameterfrei: ε_2

(1) $x = -1 + \lambda \Rightarrow \lambda = x + 1$

(2) $y = -1 + \mu \Rightarrow \mu = y + 1$

(3) $z = 0 - \lambda - \mu = -(x + 1) - (y + 1)$ oder

ε_2: $x + y + z = -2$

9 Wirtschaftsmathematik

9.1 **a)** $K = 3000 + 3000 \cdot 0{,}04 \cdot \frac{7}{12} = 3000 \cdot \left(1 + 0{,}04 \cdot \frac{7}{12}\right) = 3070$ €

b) $K = 3000 \cdot \left(1 + 0{,}04 \cdot \frac{4{,}5}{12}\right) = 3045$ € **c)** $K = 3000 \cdot \left(1 + 0{,}04 \cdot \frac{25}{360}\right) =$ € 3083,33 €

d) $K = 3000 \cdot \left(1 + 0{,}04 \cdot \frac{110}{360}\right) = 3036{,}67$

9.2 **a)** $i = \frac{Z \cdot 12}{K_0 \cdot n} = \frac{20 \cdot 12}{1000 \cdot 4} = 0{,}06 = 6\%$ **b)** 4% **c)** $i = \frac{Z \cdot 360}{K_0 \cdot t} = \frac{20 \cdot 360}{1000 \cdot 150} = 0{,}048 = 4{,}8\%$

d) 7,2%

9.3 **a)** $t = \frac{Z \cdot 360}{K_0 \cdot i} = \frac{100 \cdot 360}{8000 \cdot 0{,}04} = 225$ Tage **b)** 150 Tage **c)** 113 Tage **d)** 90 Tage

9.4 $K_0 = \frac{K}{\left(1 + i \cdot \frac{n}{12}\right)} = \frac{3690}{\left(1 + 0{,}0375 \cdot \frac{8}{12}\right)} = 3600$ €

9.5 $Z = K_0 \cdot i = 1000 \cdot 0{,}03 =$ € 30,–; davon abzüglich KESt = 0,25·30 = 7,5 €. Ertrag nach Berücksichtigung der KESt: 30 – 7,5 = 22,50 €.

Ist i_K der Zinssatz "nach KESt", so gilt: $22{,}5 = 1000 \cdot i_K \Rightarrow i_K = 2{,}25\% = \frac{3}{4} \cdot i$

9.6 **a)** $K_n = K_0 \cdot (1 + i)^n = 1000 \cdot (1 + 0{,}04)^5 = 1216{,}65$ €

b) $K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n} = \frac{7969{,}24}{1{,}06^8} = 5000$ € **c)** $1 + i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} = \sqrt[4]{\frac{2339{,}72}{2000}} = 1{,}04$; $i = 4\%$

d) $K_n = K_0 \cdot q^n$ mit $q = 1 + i$; $\frac{K_n}{K_0} = q^n$; logarthmieren $\Rightarrow \ln\frac{K_n}{K_0} = \ln q^n$; $\ln\frac{K_n}{K_0} = n \cdot \ln q$;

$n = \frac{\ln(K_n/K_0)}{\ln q} = \frac{\ln(91922{,}96/50000)}{\ln 1{,}07} = 9$ Jahre

9.7 **a)** $K_n = 1500 \cdot (1 + 0{,}045 \cdot 5) = 1837{,}50$ € **b)** $K_n = 1500 \cdot (1 + 0{,}045)^5 = 1869{,}27$ €

9.8 a) $K_0 = \frac{1000}{1{,}05^4} = 822{,}70$ € b) $K_0 = \frac{2000}{1{,}05^4} = 1645{,}40$ €

9.9 a) $i = \sqrt[4]{\frac{5000}{3000}} - 1 = 0{,}136 = 13{,}6\%$ b) $i = \sqrt[6]{\frac{5000}{3000}} - 1 = 0{,}089 = 8{,}9\%$

c) $i = \sqrt[8]{\frac{5000}{3000}} - 1 = 0{,}066 = 6{,}6\%$ d) $i = \sqrt[10]{\frac{5000}{3000}} - 1 = 0{,}052 = 5{,}2\%$

9.10 $n = \frac{\ln 2431{,}01 - \ln 2000}{\ln 1{,}05} = 4$ Jahre b) $n = \frac{\ln 2680{,}19 - \ln 2000}{\ln 1{,}05} = 6$ Jahre

9.11 **a)** Nach 20 Jahren Verdopplung von K_0 auf $2 \cdot K_0$;
nach weiteren 20 Jahren verdoppelt sich $2 \cdot K_0$ auf $4 \cdot K_0$.

b) 80 Jahre = 4·20 Jahre; pro 20 Jahre eine Verdopplung $\Rightarrow$ K_0 erhöht sich auf 16 K_0 = € 1600

c) $2K_0 = K_0 \cdot q^{20}$; $2 = q^{20}$; $q = \sqrt[20]{2} \approx 1{,}035$; $i \approx 3{,}5\%$

9.12 **a)** $K_n = 500 \cdot 1{,}04^2 \cdot 1{,}035 \cdot 1{,}03^2 = 593{,}82$ € **b)** $K_n = 1000 \cdot 1{,}04^2 \cdot 1{,}035 \cdot 1{,}03^2 = 1187{,}63$ €

9.13 **a)** $K_n = 5000 \cdot 1{,}06^3 \cdot 1{,}055 \cdot 1{,}045^6 = 8181{,}59\ €$

b) $8181{,}59 = 5000 \cdot \left(1+\overline{i}\right)^{10};\quad \overline{i} = \sqrt[10]{\dfrac{8181{,}59}{5000}} - 1 \approx 0{,}05 = 5\%$

9.14 $K_n = \left(400 \cdot 1{,}03^2 - 200\right) \cdot 1{,}03^2 = 238{,}02\ €$

9.15 **a)** $2500 = 2000 \cdot 1{,}04^n \Rightarrow n = \dfrac{\ln 2500 - \ln 2000}{\ln 1{,}04} \approx 5{,}69$; nach 6 vollen Jahren

b) $K_n = 2000 \cdot 1{,}04^6 = 2530{,}64\ €$ **c)** $K_n = 2000 \cdot 1{,}04^5 = 2433{,}31\ €$

d) $2500 - 2433{,}31 = 66{,}69;\quad 66{,}69 = 2433{,}31 \cdot \dfrac{0{,}04 \cdot t}{360} \Rightarrow t = \dfrac{66{,}69 \cdot 360}{2433{,}31 \cdot 4} = 246{,}7 \approx 247$ Tage

9.16 **a)** $Z = 5000 \cdot 1{,}04^5 - 5000 = 5000 \cdot \left(1{,}04^5 - 1\right) = 1083{,}26\ €$

b) Jährlich: $5000 \cdot 0{,}04 = 200\ €;\quad 5 \cdot 200 = 1000\ €$

9.17 $K_n = 400 \cdot 1{,}045^3 + 400 \cdot 1{,}045^2 + 400 \cdot 1{,}045 = 1311{,}28\ €$

9.18 $K_n = 2000 \cdot 1{,}04^5 = 2433{,}31\ €;\ 2431{,}01 = 1000 \cdot (1+i)^5;\ i = \sqrt[5]{2{,}43101} - 1 = 0{,}195 = 19{,}5\%$

9.19 $q = 1 + i = 1{,}035;\ (300 \cdot q^3 + 300 \cdot q^2 + 300 \cdot q + 300) \cdot \left(1 + 0{,}035 \cdot \dfrac{1}{2}\right) = 1286{,}61\ €$

9.20 **a)** $20000 \cdot 1{,}08^2 = 23328{,}00\ €$ **b)** $(20000 \cdot 1{,}08 - 12000) \cdot 1{,}08 = 10368{,}00\ €$

9.21 a) $30000 \cdot \left(1 + \dfrac{5 \cdot 0{,}05}{12}\right) \cdot \left(1 + \dfrac{5 \cdot 0{,}05}{12}\right) = 31263{,}02\ €$

b) $30000 \cdot \left(1 + \dfrac{2 \cdot 0{,}05}{12}\right) \cdot \left(1 + \dfrac{8 \cdot 0{,}05}{12}\right) = 31258{,}33\ €$

c) $30000 \cdot \left(1 + \dfrac{214 \cdot 0{,}05}{360}\right) \cdot (1 + \cdot 0{,}05)^3 \cdot \left(1 + \dfrac{32 \cdot 0{,}05}{360}\right) = 35919{,}90\ €$

d) $30000 \cdot \left(1 + \dfrac{4 \cdot 0{,}05}{12}\right) \cdot (1 + 0{,}05)^2 \cdot \left(1 + \dfrac{112 \cdot 0{,}05}{360}\right) = 34149{,}33\ €$

9.22 a) $30000 \cdot 1{,}05^{\frac{10}{12}} = 31244{,}89\ €$ b) $30000 \cdot 1{,}05^{\frac{10}{12}} = 31244{,}89\ €$

c) $30000 \cdot 1{,}05^{\left(3 + \frac{246}{360}\right)} = 35906{,}12\ €$ d) $30000 \cdot 1{,}05^{\left(2 + \frac{4}{12} + \frac{112}{360}\right)} = 34131{,}48\ €$

9.23 a) $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n \Rightarrow n = \dfrac{\ln K_n - \ln K_0}{\ln(1+i)} = 5{,}69$ Jahre b) $i = \sqrt[n]{\dfrac{K_n}{K_0}} - 1 = 0{,}057 = 5{,}7\%$

9.24 $K_0 = \dfrac{K_n}{(1+i)^n} = \dfrac{1200}{1{,}05^{(1+4/12)}} = 1124{,}42\ €$ **9.25** $K_0 = \dfrac{K_n}{(1+i)^n} = \dfrac{10000}{1{,}04^3} = 8889{,}96\ €$

9.26 $K_0 = 40000 + \dfrac{50000}{1{,}08} + \dfrac{50000}{1{,}08^2} = 129163{,}24\ €$ **9.27** $K_0 = \dfrac{1000}{1{,}05} + \dfrac{1000}{1{,}05^2} + \dfrac{1000}{1{,}05^3} + \dfrac{1000}{1{,}05^4} = 3545{,}95\ €$

9.28 **a)** $K_0 = \dfrac{K_n}{(1+i)^n} = \dfrac{25000}{1{,}08^2} = 21433{,}47$, d.h. 20000 € sofort ist für den Käufer günstiger

b) i Zinssatz, bei dem die beiden Angebote gleichwertig sind.

$20000 \cdot (1+i)^2 = 25000 \Rightarrow 1 + i = \sqrt{\dfrac{25000}{20000}} = 1{,}118;\ i = 11{,}8\%$

9.29 **a)** R Rückzahlungsrate; $10000 = \frac{R}{1{,}08} + \frac{R}{1{,}08^2} \Rightarrow R = 5607{,}69$

b) i Zinssatz der Bank: $q = 1 + i$; $10000 = \frac{6000}{q} + \frac{6000}{q^2}$; $10000q^2 = 6000q + 6000$; $5q^2 = 3q + 3$;

$5q^2 - 3q - 3 = 0$; $q_{12} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 5 \cdot (-3)}}{2 \cdot 5} = \frac{2 \pm \sqrt{69}}{10}$; $q_1 = 1{,}131$; $q_2 = -0{,}531$ sachlich nicht sinnvoll; $i = q_1 - 1 = 0{,}131 = 13{,}1\%$

9.30 **a)** $i = 10\%$; $q = 1 + i = 1{,}1$; Barwert A: $200000 + \frac{200\,000}{q} + \frac{200\,000}{q^2} = 547\,107{,}44$ €;

Barwert B: $\frac{700\,000}{q^2} = 578512{,}40$ €; B ist für den Verkäufer günstiger.

b) i Zinssatz, bei dem die Angebote gleichwertig sind; $q = 1 + i$;

$200000 + \frac{200000}{q} + \frac{200000}{q^2} = \frac{700000}{q^2}$; $200000q^2 + 200000q + 200000 = 700000$;

$2q^2 + 2q - 5 = 0$; $q_{12} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{44}}{4}$; $q_1 = 1{,}158$; $q_2 = -2{,}158$ sachlich nicht sinnvoll; $i = q_1 - 1 = 0{,}158 = 15{,}8\%$

9.31 a) $i = 0{,}06$; $q = 1 + i = 1{,}06$;

Barwert A: $4000000 + \frac{300000}{q^3} = 6241774{,}52$ € $\approx 6{,}24$ Mio. €;

Barwert B: $2000000 + \frac{100000}{q} + \frac{100000}{q^2} + \frac{100000}{q^3} + \frac{100000}{q^4} + \frac{100000}{q^5} = 6\,212\,363{,}80$ € $\approx 6{,}21$ Mio.€

Barwert C: $2000000 + \frac{3000000}{q^2} + \frac{2000000}{q^4} = 6\,254\,176{,}65$ € $\approx 6{,}25$ Mio. €;

Angebot C ist am günstigsten!

b) $i = 0{,}12$; $q = 1 + i = 1{,}12$;

Barwert A: $4000000 + \frac{300000}{q^5} = 5\,702\,280{,}57$ € $\approx 5{,}70$ Mio. €;

Barwert B: $2000000 + \frac{100000}{q} + \frac{100000}{q^2} + \frac{100000}{q^3} + \frac{100000}{q^4} + \frac{100000}{q^5} = 5\,604\,776{,}20$ € $\approx 5{,}60$ Mio.€

Barwert C: $2000000 + \frac{3000000}{q^2} + \frac{2000000}{q^4} = 5\,662\,617{,}79$ € $\approx$ 5,66 Mio. €;

Angebot A ist am günstigsten!

9.32 $i = 9\%$; $q = 1 + i = 1{,}09$;

a) Barwert A: $2\,000\,000 + \frac{3\,000\,000}{q^2} = 4\,525\,039{,}98$ € $\approx 4{,}53$ Mio. €;

Barwert B: $1\,000\,000 + \frac{2\,000\,000}{q} + \frac{2\,000\,000}{q^2} = 4\,518\,222{,}37$ € $\approx 4{,}52$ Mio. €

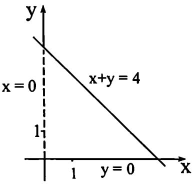
Barwert C: $3\,000\,000 + \frac{1\,000\,000}{q} + \frac{1\,000\,000}{q^2} = 4\,759\,111{,}19$ € $\approx 4{,}76$ Mio. €

b) $4\,759\,111{,}19 - 4\,518\,222{,}37 = 240\,888{,}82 \approx 0{,}24$ Mio. €. Um 0,24 Mio. €.

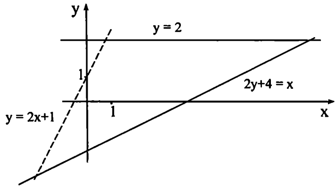
c) $2\,000\,000 + \frac{x}{q^2} = 4\,759\,111{,}19$; $2\,000\,000 \cdot q^2 + x = 4\,759\,111{,}19$; $x = 3\,278\,100{,}00 \approx 3{,}28$ Mio.€

Die neue Restzahlung würde € 3,28 Mio. € betragen, das ist um 0,28 Mio. € mehr.

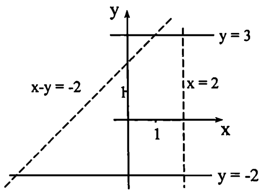
9.33 **a)**



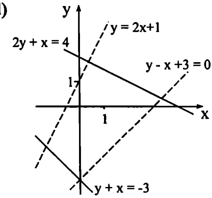
b)



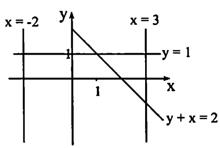
c)



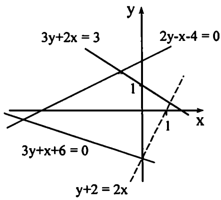
d)



e) Unbeschränkte Lösungsmenge



f)



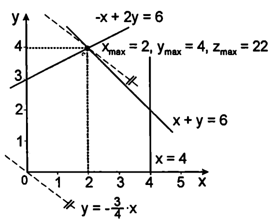
9.34 **a)** I: $x \leq 1$
II: $y \geq 1$
III: $y \leq 2x + 1$

b) I: $y \geq -1$
II: $y \leq x + 1$:
III: $y \leq -x + 1$

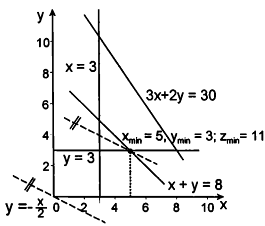
c) I: $x \geq -1$
II: $y \geq x$
III: $y \leq -x + 2$

d) I: $y \leq x + 3$
II: $x \geq -2$
III: $y \leq -2x + 2$
IV: $y \geq -0{,}5x - 1$

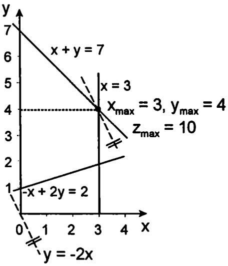
9.35 **a)**



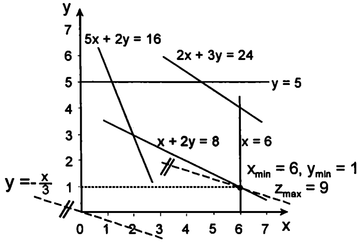
b)



9.35 c)



d)

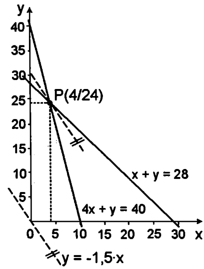


9.36 a) x Stück von Gerät A, y Stück von Gerät B

	Gerät A	Gerät B	Verfügbare Zeit
Montageplatz I	4 h	1 h	40 h
Montageplatz II	1 h	1 h	28 h
Gewinn	€ 600,-	€ 400,-	

I: $x \geq 0$
II: $y \geq 0$
III: $4x + y \leq 40$
<u>IV: $x + y \leq 28$</u>
$z = 600 \cdot x + 400 \cdot y \rightarrow$ Maximum

Maximum:
A: 4 Stück;
B: 24 Stück;
maximaler Gewinn:
12000 €

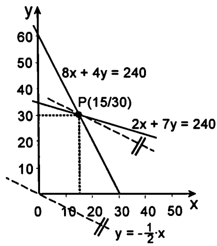


9.37 a) x Stück von L_1, y Stück von L_2

	Lampe L_1	Lampe L_2	Verfügbare Zeit
Mitarbeiter M_1	2 min	7 min	4 h = 240 min
Mitarbeiter M_2	8 min	4 min	4 h = 240 min
Gewinn	€ 100,-	€ 200,-	

I: $x \geq 0$
II: $y \geq 0$
III: $2x + 7y \leq 240$
<u>IV: $8x + 4y \leq 240$</u>
$z = 100 \cdot x + 200 \cdot y \rightarrow$ Maximum

Maximum:
L_1: 15 Stück;
L_2: 30 Stück;
maximaler Gewinn:
7500 €

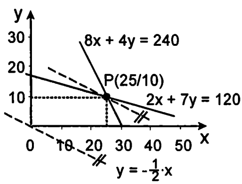


b) x Stück von L_1, y Stück von L_2

	Lampe L_1	Lampe L_2	Verfügbare Zeit
Mitarbeiter M_1	2 min	7 min	2 h = 120 min
Mitarbeiter M_2	8 min	4 min	4 h = 240 min
Gewinn	€ 100,-	€ 200,-	

I: $x \geq 0$
II: $y \geq 0$
III: $2x + 7y \leq 120$
<u>IV: $8x + 4y \leq 240$</u>
$z = 100 \cdot x + 200 \cdot y \rightarrow$ Maximum

Maximum:
L_1: 25 Stück;
L_2: 10 Stück;
maximaler Gewinn:
4.500

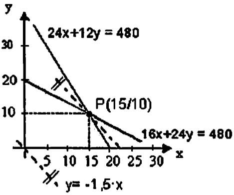


9.38 **a)** x Stück Z_1, y Stück Z_2

	Teil Z_1	Teil Z_2	Verfügbare Zeit
Automat I	24 min	12 min	8 h = 480 min
Automat II	16 min	24 min	8 h = 480 min
Gewinn	€ 600,-	€ 400,-	

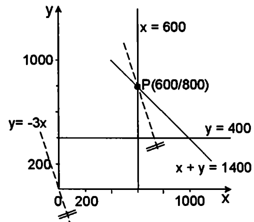
I: $x \geq 0$
II: $y \geq 0$
III: $24x + 12y \leq 480$
IV: $16x + 24y \leq 480$
$z = 600 \cdot x + 400 \cdot y \rightarrow$ Maximum

Maximum:
Z_1: 15 Stück;
Z_2: 10 Stück;
maximaler
Gewinn: 13000 €



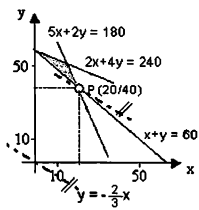
9.39 x Stück von Qualität A
y Stück von Qualität B:
I: $x \geq 0$
II: $y \geq 0$
III: $x \geq 600$
IV: $y \geq 400$
V: $x + y \geq 1400$
$z = 1{,}2 \cdot x + 0{,}4 \cdot y \rightarrow$ Minimum

Minimum:
Qualität A: 600 Stück;
Qualität B: 800 Stück;
Minimale Kosten: 1040 €



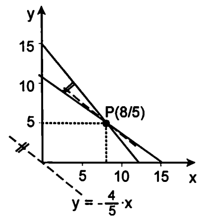
9.40 x Stück von Qualität A
y Stück von Qualität B:
I: $x \geq 0$
II: $y \geq 0$
III: $5x + 2y \leq 180$
IV: $2x + 4y \leq 240$
V: $x + y \geq 60$
$z = 60 \cdot x + 90 \cdot y \rightarrow$ Minimum

Minimum:
Werkstück A: 20 Stück;
Werkstück B: 40 Stück;
Minimale Kosten: 4800 €



9.41 x Flugzeuge vom Typ A
y Flugzeuge vom Typ B
I: $x \geq 0$
II: $y \geq 0$
III: $40 \cdot x + 56 \cdot y \geq 600$
IV: $1000 \cdot x + 800 \cdot y \geq 12000$
$z = 40000 \cdot x + 50000 \cdot y \rightarrow$ Minimum

Minimum:
8 Flugzeuge vom Typ A;
5 Flugzeuge vom Typ B;
Minimale Mietkosten:
570000 €

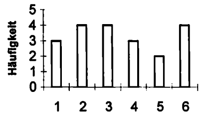


10 Beschreibende Statistik

10.1 **a)**

Werte	Strichliste	Absolute Häufigkeit	Prozentuelle Häufigkeit
1	III	3	15%
2	IIII	4	20%
3	IIII	4	20%
4	III	3	15%
5	II	2	10%
6	IIII	4	20%

b)



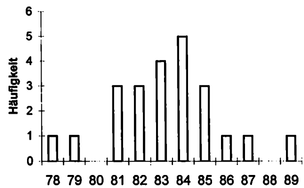
c) $\bar{x} = 3{,}45$; $\tilde{x} = 3$; $q_1 = 2$; $q_3 = 5$; $s = 1{,}76$; $s^2 = 3{,}10$; $R = 5$; $d = 3$

10.2 $\bar{x} = 44{,}99$ mm; $s = 0{,}41$ mm

10.3 **a)**

Werte	Strichliste	Absolute Häufigkeit	Prozentuelle Häufigkeit
78	I	1	4,35%
79	I	1	4,35%
80		0	0,00%
81	III	3	13,04%
82	III	3	13,04%
83	IIII	4	17,39%
84	~~IIII~~	5	21,74%
85	III	3	13,04%
86	I	1	4,35%
87	I	1	4,35%
88		0	0,00%
89	I	1	4,35%

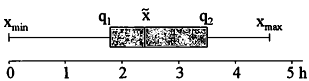
b)



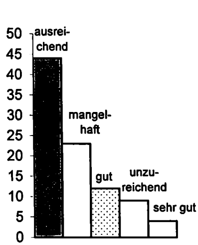
c) $\bar{x} = 83{,}3$; $\tilde{x} = 83$; $q_1 = 82$; $q_3 = 85$; $s = 2{,}5$; $s^2 = 6{,}0$; $R = 11$; $d = 3$

10.4 $\bar{x} = 2{,}51$; $\tilde{x} = 2{,}4$; $q_1 = 1{,}8$; $q_3 = 3{,}5$; $s = 1{,}31$; $s^2 = 1{,}71$; $R = 4{,}6$; $d = 1{,}7$

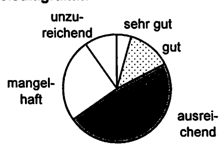
b)



10.5 **a)** **Pareto-Diagramm**



b) **Kreisdiagramm**

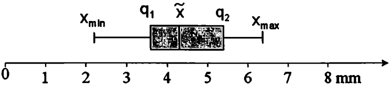


Mittenwinkel für "sehr gut": $\frac{4}{92} \cdot 360° \approx 16°$;
"gut": 47°; "ausreichend": 172°;
"mangelhaft": 90°; "unzureichend": 35°

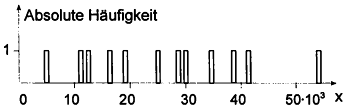
10.6 **a)** $\bar{x} = 41{,}17$; $\tilde{x} = 40{,}6$; $s = 1{,}19$; $s^2 = 1{,}42$; $R = 3{,}1$
b) $\bar{x} = 7{,}991$; $\tilde{x} = 8{,}02$; $s = 0{,}087$; $s^2 = 0{,}0076$; $R = 0{,}27$

10.7 $\bar{x} = 4{,}27$ mm; $\tilde{x} = 4{,}3$ mm; $q_1 = 3{,}6$ mm; $q_3 = 5{,}4$ mm; $s = 1{,}15$ mm;
$s^2 = 1{,}32\ \text{mm}^2$; $R = 4{,}2$ mm; $d = 1{,}8$ mm

b)

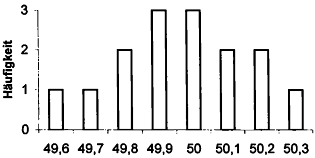


10.8 **a)**



b) $\bar{x} = 26{,}30$; $\tilde{x} = 0{,}5 \cdot (24{,}9 + 28{,}4) = 26{,}65$; $s = 14{,}29$; $R = 48{,}8$ (jeweils in 10^3 Betätigungen)

10.9 **a)**



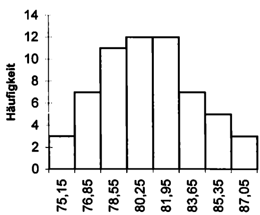
b) $\bar{x} = 49{,}97$ mA; $\tilde{x} = 50{,}0$ mA; $s = 0{,}20$ mA; $s^2 = 0{,}038\ (\text{mA})^2$; $R = 0{,}7$ mA

10.10 17,2 Punkte

10.11 $\bar{x} = \frac{1}{90} \cdot (30 \cdot 49{,}4 + 20 \cdot 50{,}2 + 40 \cdot 50{,}1) = 49{,}89$

10.12 $x_{min} = 73{,}5\ \Omega$, $x_{max} = 87{,}0\ \Omega$, $R = 13{,}5\ \Omega$;
Klassenbreite $w = \frac{R}{\sqrt{n}} = \frac{R}{\sqrt{60}} = 1{,}7428... \approx 1{,}7\ \Omega$ (auf Genauigkeit der Messwerte runden).

Klasse	Absolute Häufigkeit
73,45 ... 75,15	3
75,15 ... 76,85	7
76,85 ... 78,55	11
78,55 ... 80,25	12
80,25 ... 81,95	12
81,95 ... 83,65	7
83,65 ... 85,35	5
85,35 ... 87,05	3



Auf der Abszissenachse sind unter den Rechtecken die *rechten* Klassengrenzen angeführt.

b) Berechnung mit allen Daten: $\bar{x} = 79{,}94\ \Omega$; $s = 3{,}06\ \Omega$
Zum Vergleich die Berechnung über die Klassenmitten 74,3; 76; ...; 86,2:
$\bar{x} \approx 79{,}94\ \Omega$; $s \approx 3{,}07\ \Omega$

10.13

Klasse	Klassen-mitten	Absolute Häufigkeit
436,5 ... 439,3	437,9	1
439,3 ... 442,1	440,7	4
442,1 ... 444,9	443,5	6
444,9 ... 447,7	446,3	11
447,7 ... 450,5	449,1	17
450,5 ... 453,3	451,9	17
453,3 ... 456,1	454,7	15
456,1 ... 458,9	457,5	4
458,9 ... 461,7	460,3	4
461,7 ... 464,5	463,1	1

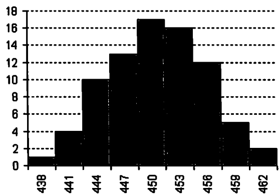
$\overline{x} \approx 90{,}02\ \text{m}\Omega$; $s \approx 0{,}425\ \text{m}\Omega$

10.14 $x_{min} = 437$ g, $x_{max} = 462$ g, $R = 25$ g; Klassenbreite $w = \frac{25}{\sqrt{80}}\,\text{g} = 2{,}795 \approx 3$ g (auf die Genauigkeit der Messwerte gerundet). Beginn der Klassierung: Untere Rundungsgrenze von x_{min}, also 436,5; weitere Klassengrenzen um jeweils $w = 3$ höher.

D12 fx {=HÄUFIGKEIT(A2:J9;C12:C20)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Messwerte:									
2	453	451	454	453	446	449	453	452	451	462
3	455	452	446	450	449	454	459	459	456	448
4	449	456	456	448	437	441	444	456	446	453
5	447	459	457	442	445	454	442	458	452	448
6	450	456	454	444	445	442	445	450	457	458
7	451	451	446	448	456	450	450	461	452	455
8	449	455	443	451	452	449	445	451	454	449
9	446	443	446	453	453	448	455	448	444	444
10										
11	Un.Kl.gr.	Kl.mitte	Ob.Kl.gr.	n_j						
12	436,5	438	439,5	1						
13	439,5	441	442,5	4						
14	442,5	444	445,5	10						
15	445,5	447	448,5	13						
16	448,5	450	451,5	17						
17	451,5	453	454,5	16						
18	454,5	456	457,5	12						
19	457,5	459	460,5	5						
20	460,5	462	463,5	2						

Im Zellbereich C12:C20 stehen die *oberen* Klassengrenzen. Mit der Funktion HÄUFIGKEIT werden die Besetzungszahlen n_j der Klassen bestimmt. Vor Aufrufen dieser Funktion ist der Zellbereich der Besetzungszahlen D12:C:20 zu markieren. Abschluss durch gleichzeitiges Drücken der Tasten Strg, Hochstellen und Enter.



Hinweis zum Histogramm: Auf der Abszissenachse sind unter den Rechtecken die Klassenmitten angeführt.

b) $\overline{x} = 450{,}525 \approx 450{,}5$ g (bei Berücksichtigung aller Messwerte ist $\overline{x} = 450{,}513 \approx 450{,}5$ g); $s = 5{,}267 \approx 5{,}27$ g (bei Berücksichtigung aller Messwerte ist $s = 5{,}166 \approx 5{,}17$ g)

11 Wahrscheinlichkeitsrechnung

11.1 $P = \dfrac{1024}{8300000000} \approx 1{,}23 \cdot 10^{-7}$

11.2 **a)** 1/6 **b)** 1/6 **c)** 5/6 **d)** 1/2 **e)** 2/3 **f)** 5/6

11.3 **a)** 16, 26, 36, 46, 56, 66, 61, 62, 63, 64, 65; P = 11/36
b) 14, 23, 32; 41; P = 1/9 **c)** 11, 12, 21, 13, 22, 31, 23, 32; 14, 41; P = 5/18

11.4 **a)** WWW; P = 1/8 **b)** ZWW, WZW, WWZ; P = 3/8
c) WWW, ZWW, WZW, WWZ; P = ½
d) ZWW, WZW, WWZ, ZZW, ZWZ, WZZ, ZZZ; P = 7/8
e) ZZW, ZWZ, WZZ; P = 3/8
f) WWW, ZWW, WZW, WWZ, ZZW, ZWZ, WZZ; P = 7/8
g) ZZW, ZWZ, WZZ, ZZZ; P = 1/2 **h)** ZZZ; P = 1/8

11.5 **a)** ja **b)** nein **c)** ja

11.6 **a)** ja **b)** ja **c)** nein

11.7 nicht höchstens 1 fehlerhafte Einheit ziehen

11.8 **a)** $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$ **b)** $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{18}$ **c)** $\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{18}$
d) Vereinbare Ereignisse! $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{11}{36}$ oder $1-\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{11}{36}$
e) Wurffolgen 11, 12, 21, 13, 22, 31, 14, 23, 32, 41, 15, 24, 33, 42, 51; $P = \frac{5}{12}$
f) Wurffolgen: 11, 13, 15, 31, 51; $P = \frac{5}{36}$

11.9 Wurffolgen: ZZW, ZWZ, WZZ; $P = \frac{3}{8}$

11.10 **a)** $\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{25}{216}=11{,}6\%$
b) Beim 3.Mal oder 4.Mal oder ... = nicht beim 1.Mal und nicht beim 2.Mal;
$\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{36}=69{,}4\%$

11.11 Nicht "6" beim ersten Mal und wenigstens einmal "6" beim zweiten Mal;
unabhängige Ereignisse; $\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\left(1-\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\right)=\frac{275}{1296}=21{,}2\%$

11.12 **a)** ZZWW, ZWZW, ZWWZ, WZZW, WZWZ, WWZZ, $P = \frac{6}{16}=\frac{3}{8}=37{,}5\%$
b) 50% (Alle Reihenfolgen von ZZZW und von ZWWW)

11.13 $\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{3}{8}=37{,}5\%$ (siehe nachfolgende Tabelle)

Große Münzen	Kleine Münzen	Wahrscheinlichkeit
WW	WW	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$
entweder WZ oder ZW	entweder WZ oder ZW	$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$
ZZ	ZZ	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$

10.15 $\frac{1}{108}+\frac{1}{54}=\frac{1}{36}=2{,}78\%$ (siehe nachfolgende Tabelle)

Roter Würfel	Augensumme der grünen Würfel	Wahrscheinlichkeit
3	1+2 oder 2+1	$\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{36}\right)=\frac{1}{108}$
5	1+4 oder 2+3 oder 3+2 oder 4+1	$\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}\right)=\frac{1}{54}$

10.16 Nicht 0-mal ("5" oder "6"); P = $1-\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}=70{,}4\%$

10.17 $\frac{3}{5}$ **10.18** $\frac{5}{6}$ **10.19** $\frac{1}{2}$ **10.20** $0{,}7+0{,}3\cdot 0{,}7=0{,}91=91\%$

10.21 **a)** $\frac{35}{40}\cdot\frac{34}{39}\cdot\frac{33}{38}=66{,}2\%$ **b)** $1-\frac{35}{40}\cdot\frac{34}{39}\cdot\frac{33}{38}=33{,}8\%$

c) $\frac{35}{40}\cdot\frac{34}{39}\cdot\frac{33}{38}+3\cdot\frac{5}{40}\cdot\frac{35}{39}\cdot\frac{34}{38}=96{,}4\%$

10.22 **a)** $0{,}96\cdot 0{,}95=0{,}912=91{,}2\%$ **b)** $1-0{,}96\cdot 0{,}95=0{,}088=8{,}8\%$

c) $0{,}04\cdot 0{,}95=0{,}038=3{,}8\%$

10.23 **a)** $0{,}95\cdot 0{,}92=87{,}4\%$ **b)** $0{,}05\cdot 0{,}92+0{,}95\cdot 0{,}08=12{,}2\%$

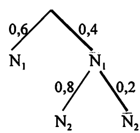
c) $1-0{,}08\cdot 0{,}05=99{,}6\%$ **d)** wie b)

e) $1-0{,}95\cdot 0{,}92=12{,}6\%$

10.24 **a)** Mindestens ein Erfolg = nicht 0 Erfolge; $1-0{,}6^5=0{,}922=92{,}2\%$

b) n = Anzahl der Durchführungen, $1-0{,}6^n\geq 0{,}8$ erstmals für $n=4$

10.25 N_1 ... Fehler wird beim ersten Mal nicht entdeckt,
N_2 ... Fehler wird beim zweiten Mal nicht entdeckt;
$P(N_1$ **und** $N_2)=P(N_1)\cdot P(N_2|N_1)=0{,}4\cdot 0{,}2=8\%$



10.26 **a)** $\frac{36}{40}\cdot\frac{35}{39}=0{,}8077$ **b)** $\frac{36}{40}\cdot\frac{4}{39}+\frac{4}{40}\cdot\frac{36}{39}=0{,}1846$ **c)** $1-\frac{4}{40}\cdot\frac{3}{39}=0{,}9923$

d) $1-\frac{36}{40}\cdot\frac{35}{39}=0{,}1923$ **e)** $\frac{4}{40}\cdot\frac{3}{39}=0{,}0077$

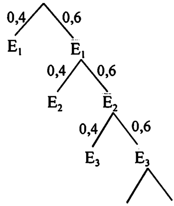
10.27 **a)** $0{,}9^2=81\%$ **b)** $0{,}9\cdot 0{,}1+0{,}1\cdot 0{,}9=18\%$ **c)** $1-0{,}1^2=99\%$

d) $1-0{,}9^2=19\%$ **e)** $0{,}1^2=1\%$ **f)** $0{,}1\cdot 0{,}9=9\%$

10.28 **a)** $\frac{5}{7}$ **b)** $\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}=\frac{5}{21}$ **c)** $\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{6}\cdot 1=\frac{1}{21}$

10.29 kein Ausschuss = 1.Stück kein Ausschuss **und** ... **und** 100.Stück kein Ausschuss;
$0{,}99^{100}=36{,}60\%$

10.30 Siehe Baumdiagramm:
E_1 ... Fehler wird bei der ersten Prüfung entdeckt;
E_2 ...Fehler wird bei der zweiten Prüfung entdeckt, usw.
a) $0{,}6 \cdot 0{,}4 = 24\%$ **b)** $0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 64\%$
c) *Nach* der zweiten Prüfung = bei der dritten Prüfung oder bei der vierten Püfung oder noch später = nicht bei der ersten und nicht bei der zweiten Prüfung; $0{,}6 \cdot 0{,}6 = 36\%$.
Wenn *nach* der zweiten Prüfung bei der *dritten* Prüfung bedeuten soll, ist die Lösung $0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 14{,}4\%$
d) $0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 78{,}4\%$ **e)** $0{,}6^2 = 36\%$



10.31 $0{,}4 \cdot 0.02 + 0{,}3 \cdot 0{,}04 + 0{,}3 \cdot 0{,}05 = 3{,}5\%$

10.32 **a)** $\left(\frac{19}{20} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{17}{18}\right) \cdot \left(\frac{16}{17} \cdot \frac{15}{16} \cdot \frac{14}{15}\right) = \frac{7}{10} = 70\%$ **b)** $\left(\frac{18}{20} \cdot \frac{17}{19} \cdot \frac{16}{18}\right) \cdot \left(\frac{15}{17} \cdot \frac{14}{16} \cdot \frac{13}{15}\right) = 47{,}89\%$

10.33 $0{,}9992^{50} = 0{,}9608$

10.34 n Glühlampen, mindestens eine "überlebt" = nicht 0 "überleben":
$1 - 0{,}04^n \geq 0{,}9999$ erstmals für $n = 3$

10.35 **a)** $0{,}9 \cdot 0{,}8 = 72\%$ **b)** $0{,}9 \cdot 0{,}2 = 18\%$ **c)** $0{,}1 \cdot 0{,}8 = 8\%$ **d)** $1 - 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 98\%$

10.36 **a)** $0{,}96^4 = 84{,}93\%$ **b)** $1 - 0{,}96^4 = 15{,}07\%$
c) $1 - (0{,}96^4 + 4 \cdot 0{,}96^3 \cdot 0{,}04) = 0{,}91\%$

10.37 **a)** $0{,}93 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}99 = 89{,}31\%$
b) $0{,}07 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}99 = 6{,}72\%$
c) $1 - 0{,}93 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}99 = 10{,}69\%$
d) $1 - (0{,}93 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}99 + 0{,}07 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}99 + 0{,}93 \cdot 0{,}03 \cdot 0{,}99 + 0{,}93 \cdot 0{,}97 \cdot 0{,}01) = 0{,}31\%$

10.38 $0{,}9^3 + 3 \cdot 0{,}9^2 \cdot 0{,}1 = 0{,}972 = 97{,}2\%$

Buch-Nr. 120 711

Hans Siedler, Wofgang Timischl

Ingenieur-Mathematik 2
Durchgerechnete Lösungen

ISBN 978-3-7055-**0633**-6